Como gerar variáveis aleatórias contínuas?

O Método da Transformação Inversa e o Método da Rejeição

ESTAT0090 – Estatística Computacional

Prof. Dr. Sadraque E. F. Lucena
sadraquelucena@academico.ufs.br

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

Cenário

Imagine que você está trabalhando com uma nova distribuição de probabilidade contínua. Como ela é muito recente, ainda não existem funções de simulação disponíveis em bibliotecas ou pacotes de programação. Para conseguir validar seus modelos, você precisa desenvolver do zero o código para gerar dados aleatórios e realizar suas simulações.

Objetivos da aula

Nesta aula, aprenderemos a gerar ocorrências de variáveis aleatórias contínuas usando

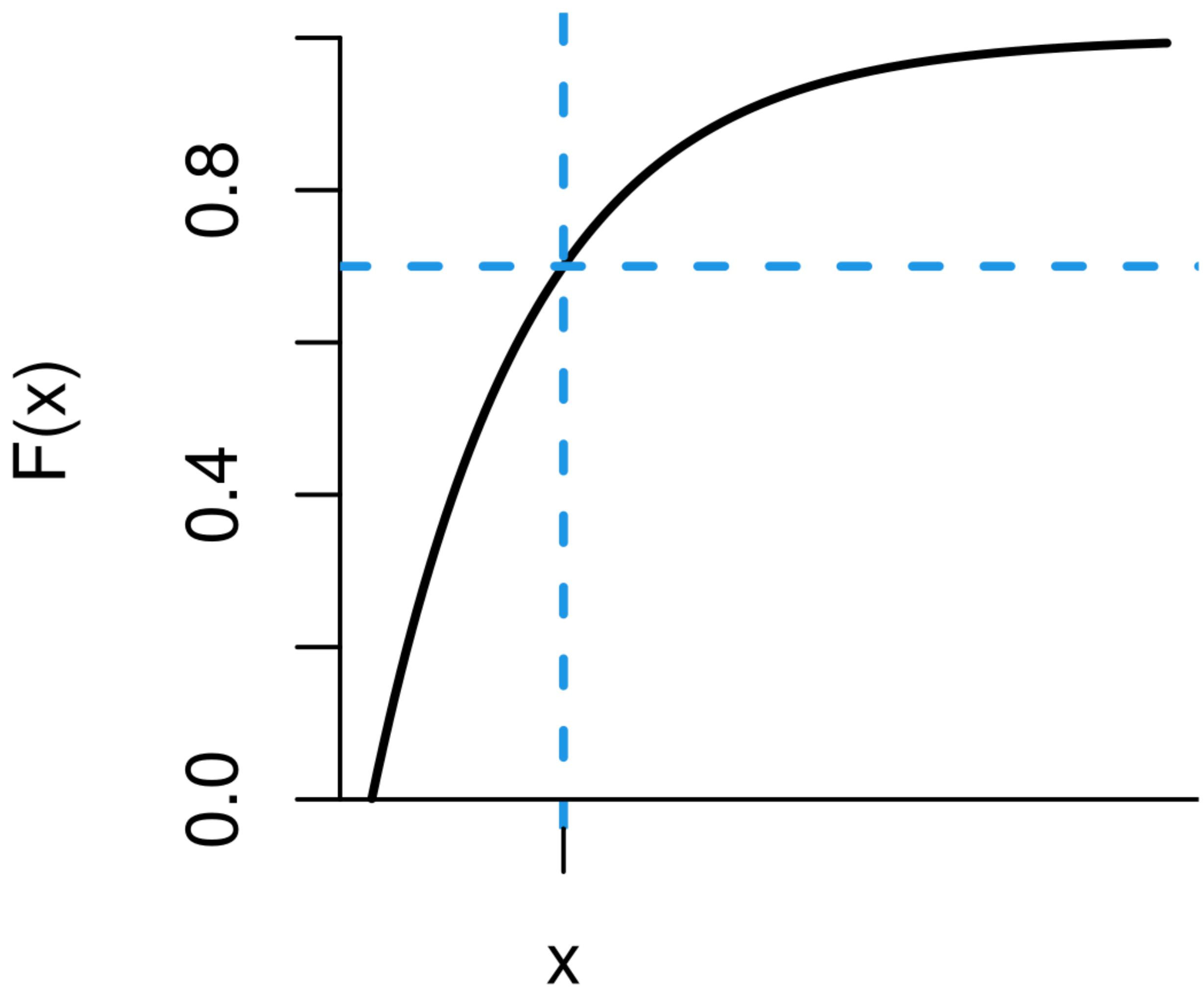
- o Método da Transformação Inversa;
- o Método da Aceitação-Rejeição.

Método da transformação inversa para variáveis contínuas

- O método da transformada inversa é adequado para geração de amostras de uma variável aleatória contínua com domínio em $\mathbb{R}$.
- Ele pode ser usado em distribuições discretas, mas não é muito útil.
- Para usar o método, basta que
  - A variável contínua X tenha função de distribuição $F(x)$ e
  - A inversa $F^{-1}(x)$ exista.

Método da transformação inversa para variáveis contínuas

Ilustração:



Método da transformação inversa para variáveis contínuas

Algoritmo

Passo 1: Gere $u \sim \text{Uniforme}(0, 1)$;

Passo 2: Retorne $X = F^{-1}(U)$.

Exemplo 11.1

Considere a distribuição Exponencial(λ) com

- $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \; x \geq 0,$
- $F(x) = 1 - e^{\lambda x}, \; x \geq 0.$

a. Determine $F^{-1}(u)$.

b. Escreva uma função no R que gere n ocorrências da Exponencial ao fornecer o valor de λ. Faça um histograma.

Exemplo 11.2

Considere a distribuição de Rayleigh com parâmetro $\sigma > 0$, isto é,

$$f(x) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \qquad x \geq 0.$$

a. Determine a distribuição de X, ou seja, $F(x)$.

b. Determine $F^{-1}(u)$.

c. Escreva uma função no R que gere n ocorrências da Rayleigh ao fornecer o valor de σ. Faça um histograma.

Exemplo 11.3

Seja X com densidade $f(x) = 3x^2, 0 < x < 1$.

a. Determine $F(x)$.

b. Determine $F^{-1}(u)$.

c. Escreva uma função no R que gere n ocorrências de X. Faça um histograma.

Método da Aceitação-Rejeição

- O método da aceitação-rejeição é um método mais avançado e popular para geração de números aleatórios.
- Ele consiste em gerar amostras de uma distribuição mais simples e então corrigir as probabiildades rejeitando alguns valores.
- Vejamos o algoritmo.

Método da Aceitação-Rejeição

- Suponha que você quer gerar valores de uam variável aleatória com distribuição $f(x)$.
- Considere então uma distribuição mais simples $g(y)$, com mesmo domínio que $f(x)$.
- Determine c tal que $\frac{f(y)}{g(y)} \leq c$.

Algoritmo

Passo 1: Gere um valor $y \sim g$;

Passo 2: Gere $u \sim \text{Uniforme}(0, 1)$;

Passo 3: Se $u \leq \frac{f(y)}{cg(y)}$, faça $x = y$;

Passo 4: Caso contrário, retorne ao Passo 1.

Exemplo 11.4

Simule uma distribuição Beta($\alpha = 2, \beta = 2$) pelo método da rejeição usando a distribuiçao $U(0, 1)$ e escreva o código em R.

A densidade da Beta(α, β) é

$$f(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, \qquad 0 < x < 1,\ \alpha, \beta > 0,$$

onde $\Gamma(\cdot)$ é a função gama, com $\Gamma(z) = (z-1)!$, se z é inteiro.

Exemplo 11.5

Gere ocorrências da densidade

$$f(y) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right), \quad y \geq 0,$$

a partir da distribuição Exponencial(λ) com

$$f(y) = \lambda \exp(-\lambda y), \quad y \geq 0.$$

Exemplo 11.6

Gere amostras da Normal(0,1) usando

a. $U(-10, 10)$.

b. Cauchy padrão.

- $Y \sim N(0, 1): \;\; f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\}, -\infty < y < \infty$
- $Y \sim U(-10, 10): \;\; f(y) = \frac{1}{20}, -10 < y < 10$
- $Y \sim Cauchy(1, 0): \;\; f(y) = \frac{1}{\pi(1+y^2)}, -\infty < y < \infty$

Ganho da aula

- Compreensão da geração de números aleatórios contínuos usando o método da transformação inversa e o método da aceitação-rejeição.

Fim

Esta aula foi baseada no livro *Simulation (Sixth Edition)*, de Sheldon M. Ross, 2023.