Resolvendo integrais difíceis com a ajuda do acaso

Método de integração de Monte Carlo

ESTAT0090 – Estatística Computacional
Prof. Dr. Sadraque E. F. Lucena
sadraquelucena@academico.ufs.br

Motivação

- Na Estatística e na Ciência de Dados, muitas vezes enfrentamos problemas complexos que não têm uma solução analítica simples ou rápida.
  - Como calcular o valor de uma integral sem solução?
  - Como estimar o preço de um ativo financeiro que depende de milhares de cenários futuros?
  - Como determinar a probabilidade de um evento raro, como a colisão de um asteroide com a Terra?
- O Método de Monte Carlo é a nossa “caixa de ferramentas” para resolver esses problemas. Ele nos permite usar o poder da simulação computacional e da aleatoriedade para encontrar respostas aproximadas para questões que seriam impossíveis de resolver no papel.

Objetivos da aula

- Entender a lógica por trás do Método de Monte Carlo para cálculo de integrais.

Resolvendo integrais por Monte Carlo

- Imagine que temos a seguinte integral:

$$\int_0^1 g(x)dx$$

- Se $g(x)$ for uma função simples, tipo x^2, a gente consegue resolver na mão:

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$$

- Mas se $g(x)$ for uma função super complexa, tipo $g(x) = \log(x^2 + e^x)$? A coisa complica, e muito!
- É aí que entra o Monte Carlo.
  - A gente pode interpretar a integral como a **esperança de uma variável aleatória**.

Resolvendo integrais por Monte Carlo

Vamos pensar numa variável aleatória U que tem uma distribuição uniforme entre 0 e 1, ou seja, $U \sim$ Uniforme$(0, 1)$. A esperança de uma função de U, $g(U)$, é dada por:

$$E[g(U)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(u) f_U(u) du$$

- $f_U(u)$ seria a função densidade da Uniforme$(0, 1)$, ou seja, $f(u) = 1$, para $0 < u < 1$. Daí

$$E[g(U)] = \int_0^1 g(d) \cdot 1 \, du = \int_0^1 g(u) du$$

- Ou seja, a integral é exatamente a esperança da função g aplicada a uma variável uniforme, $E[g(U)]$.

Resolvendo integrais por Monte Carlo

Então, se queremos estimar $E[g(U)]$, o que podemos fazer é: 1. Gerar uma amostra grande de números aleatórios $(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ de uma distribuição uniforme entre 0 e 1. 2. Calcular o valor de g para cada um desses números: $g(u_1), g(u_2), \ldots, g(u_k)$. 3. Calcular a média desses valores.

- Pela Lei dos Grandes Números, a média que a gente calcular vai se aproximar do valor verdadeiro:

$$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} g(u_i) \longrightarrow E[g(U)]$$

- Isso significa que, gerando muitos números aleatórios, a gente consegue uma aproximação excelente para a integral!

Exemplo 15.1

Vamos calcular a integral

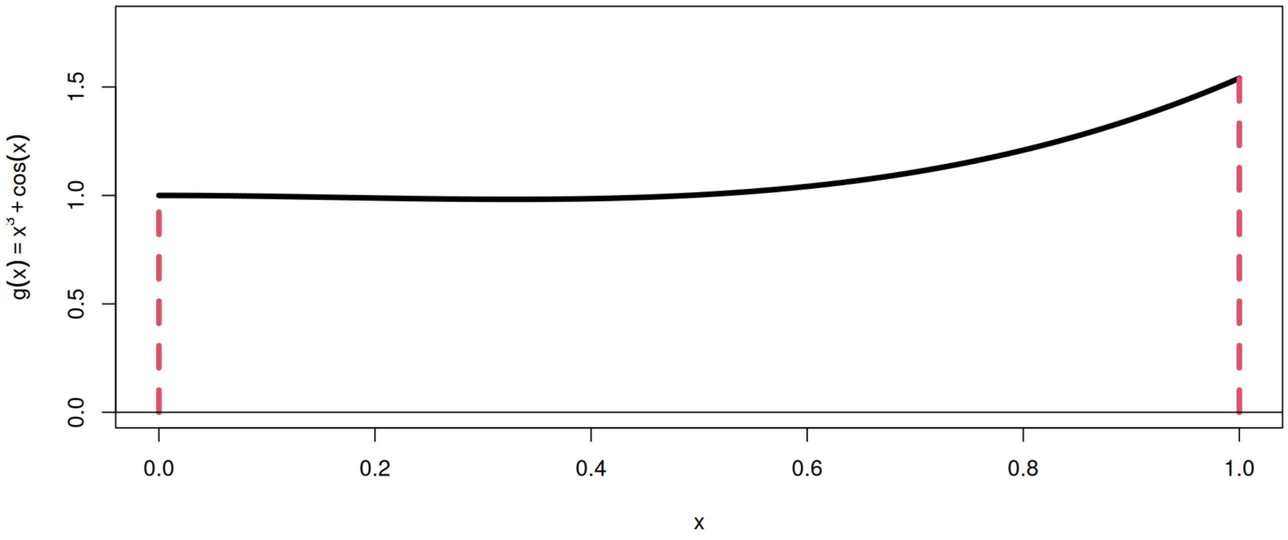
$$\int_0^1 (x^3 + \cos(x))\, dx.$$

- Vimos que calcular essa integral é o mesmo que calcular $E[U^3 + \cos(U)]$, com $U \sim$ Uniforme$(0, 1)$.

Exemplo 15.1

```r
# Função que queremos integrar
g <- function(u) u^3 + cos(u)

# gráfico
x <- seq(0, 1, length.out = 100)
curve(g(x), from = 0, to = 1, ylim = c(0, 1.8), lwd = 4,
      ylab = bquote(g(x)==x^3+cos(x)))
segments(x0=0, y0=0, x1=0, y1=cos(0), col=2, lty=2, lwd=4)
segments(x0=1, y0=0, x1=1, y1=1+cos(1), col=2, lty=2, lwd=4)
abline(h=0)
```



Exemplo 15.1

- Integrando:

```
# Gerando 100.000 amostras da Uniforme(0,1)
set.seed(1234)
u <- runif(100000, min=0, max=1)

# Aplicando a função g(u) e calculando a média
( media_monte_carlo <- mean(g(u)) )
```

```
[1] 1.091724
```

- Comparando com o resultado da função `integrate`:

```
integrate(g, lower = 0, upper = 1)
```

```
1.091471 with absolute error < 1.2e-14
```

- De forma analítica, a integral é $\frac{x^4}{4} + \text{sen}(x)$, logo:

```
integral <- function(x) (x^4/4) + sin(x)
integral(1) - integral(0)
```

```
[1] 1.091471
```

E se a integral não for no intervalo (a, b)?

Para intergrar $\int_a^b g(x)\,dx$, há duas formas:

Forma 1. *Tranformação de variável para o intervalo* $(0, 1)$.

Exemplo 15.2

Agora vamos integrar $\int_2^5 (x^3 + \cos(x))\, dx$ usando a Forma 1.

```
g <- function(u) u^3 + cos(u) # Função que queremos integrar

a <- 2; b <- 5
u <- runif(100000, min = 0, max = 1)

mean( g(a+(b-a)*u) * (b-a) )
```

```
[1] 150.2645
```

```
integral <- function(x) (x^4/4) + sin(x)
integral(5) - integral(2)
```

```
[1] 150.3818
```

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

E se a integral não for no intervalo (a, b)?

Para intergrar $\int_a^b g(x)\,dx$, há duas formas:

Forma 2. *Usamos a esperança de uma Uniforme*(a, b)*:* Essa é a mais direta e intuitiva. Lembre-se:

$$E[g(X)] = \int_a^b g(x) f_X(x)\,dx = \int_a^b g(x) \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x)\,dx$$

Logo,

$$\int_a^b g(x)\,dx = (b-a)E[g(X)]$$

- Ou seja, geramos $x_1, x_2, \ldots, x_k$ com distribuição Uniforme(a, b) e calculamos

$$(b-a)\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} g(x_i).$$

Exemplo 15.2 (continuação)

Agora vamos integrar $\int_2^5 (x^3 + \cos(x))\, dx$ usando a Forma 2.

```
a <- 2; b <- 5
x <- runif(100000, min = a, max = b)

(b-a) * mean(g(x))
```

```
[1] 150.1721
```

Exercício 15.1

Calcule por Monte Carlo as integrais:

a. $\int_0^1 e^{-x} dx$

b. $\int_2^4 e^{-x} dx$

c. $\int_1^3 x^2 + 3x^2 dx$

Ganho da aula

- Capacidade de calcular itegrais numericamente usando Monte Carlo.

Fim

Aula baseada no material “Métodos Computacionais Aplicados à Estatística Implementação no Software R” de Cristiano de Carvalho Santos.