Teorema 13.1. *Seja $X \sim Bernoulli(p)$. Então,*

$$E(X) = p$$

e

$$Var(X) = p(1-p).$$

Demonstração. Como X possui distribuição de Bernoulli com parâmetro p, sua função de probabilidade é dada por

$$P(X = x) = \begin{cases} 1-p, & x = 0, \\ p, & x = 1. \end{cases}$$

Ou seja, a variável aleatória X assume apenas dois valores:

$$X = \begin{cases} 1, & \text{com probabilidade } p, \\ 0, & \text{com probabilidade } 1-p. \end{cases}$$

Cálculo da Esperança:

Pela definição de esperança para uma variável aleatória discreta,

$$E(X) = \sum_x xP(X = x).$$

Como X pode assumir apenas os valores 0 e 1, temos

$$E(X) = 0 \cdot P(X = 0) + 1 \cdot P(X = 1).$$

Substituindo as probabilidades,

$$E(X) = 0(1-p) + 1(p).$$

Portanto,

$$\boxed{E(X) = p.}$$

Cálculo da Variância:

Para calcular a variância, utilizamos a fórmula

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

Primeiramente, calculamos $E(X^2)$. Pela definição de esperança,

$$E(X^2) = \sum_x x^2 P(X = x).$$

Como X assume apenas os valores 0 e 1,

$$E(X^2) = 0^2 P(X = 0) + 1^2 P(X = 1).$$

Substituindo as probabilidades,

$$E(X^2) = 0^2(1-p) + 1^2(p).$$

Logo,

$$E(X^2) = p.$$

Além disso, como já mostramos que

$$E(X) = p,$$

segue que

$$[E(X)]^2 = p^2.$$

Assim,

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = p - p^2.$$

Colocando p em evidência,

$$\boxed{Var(X) = p(1-p).}$$

$\square$

Teorema 13.2. *Seja $X \sim$ Binomial(n, p). Então,*

$$E(X) = np$$

e

$$Var(X) = np(1-p).$$

Demonstração. Lembre que uma variável aleatória com distribuição binomial pode ser interpretada como o número de sucessos obtidos em n ensaios de Bernoulli independentes, cada um com probabilidade de sucesso igual a p. Assim, podemos escrever

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n,$$

em que

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{se ocorre sucesso no } i\text{-ésimo ensaio,} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Logo,

$$X_i \sim \text{Bernoulli}(p), \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Além disso, as variáveis aleatórias $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são independentes.

Cálculo da Esperança:

Pela linearidade da esperança,

$$E(X) = E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n).$$

Portanto,

$$E(X) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n).$$

Pelo Teorema 13.1, como cada X_i possui distribuição de Bernoulli(p),

$$E(X_i) = p.$$

Substituindo,

$$E(X) = p + p + \cdots + p.$$

Como existem n parcelas iguais a p,

$$E(X) = np.$$

Portanto,

$$\boxed{E(X) = np.}$$

Cálculo da Variância:

Como as variáveis $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são independentes, a variância da soma é igual à soma das variâncias:

$$Var(X) = Var(X_1 + X_2 + \cdots + X_n).$$

Assim,

$$Var(X) = Var(X_1) + Var(X_2) + \cdots + Var(X_n).$$

Pelo Teorema 13.1,

$$Var(X_i) = p(1-p).$$

Logo,

$$Var(X) = p(1-p) + p(1-p) + \cdots + p(1-p).$$

Como existem n parcelas,

$$\boxed{Var(X) = np(1-p)}.$$

$\square$