

Técnicas de Contagem (Parte 1)

ESTAT0072 – Probabilidade I

Prof. Dr. Sadraque E. F. Lucena

sadraquelucena@academico.ufs.br

Exemplo 2.1

Maria quer ir da Praia da Cinelândia ao Shopping RioMar. Ela pode escolher entre as seguintes alternativas de transporte:

- **Ônibus:** 3 opções de linha (partindo do Terminal Zona Sul).
- **Mobilidade Elétrica:** 2 sistemas que oferecem patinetes e bicicletas.
- **Carro de Aplicativo:** 2 opções de serviço (Uber e 99).

Quantas opções distintas Maria tem para chegar ao seu destino?

Exemplo 2.2

Maria chegou no shopping e decidiu comer no Subway. Para isso ela precisa montar o lanche seguindo a sequência:

1. **Tipo:** 13 opções (Vegetariano, presunto, frango, frango empanado, steak churrasco, teriyaki, etc.)
2. **Pão:** 5 opções (3 queijos, 9 grãos, italiano branco, etc.)
3. **Queijo:** 4 opções (cheddar, mussarela, suíço, sem queijo)
4. **Temperos:** 5 opções (azeite, mix de pimentas, sal, vinagre, etc.)
5. **Vegetais:** 7 opções (Alface, tomate, cebola roxa, etc.)
6. **Molhos:** 9 opções de molhos (barbecue, supreme, etc.)

Ela não quer extras e quer apenas uma opção de vegetal e uma de molho. Quantos sanduíches diferentes ela pode montar?

Princípios Fundamentais da Contagem

Definição 2.1: Princípio Aditivo (OU)

Considere uma tarefa que pode ser realizada de k maneiras distintas. Se a primeira maneira de realizar a tarefa pode ser feita de n_1 formas, a segunda de n_2 formas, ..., e a k -ésima de n_k formas, sendo que essas k maneiras não têm elementos em comum, então o número total de maneiras de realizar a tarefa é dado pela soma:

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_k.$$

- O Princípio Aditivo é usado quando a ocorrência de uma opção impede a ocorrência das outras. Pense em “**ou** isso, **ou** aquilo”.

Princípios Fundamentais da Contagem

Definição 2.2: Princípio Multiplicativo (E)

- Se um processo ou evento pode ser dividido em k etapas sucessivas, e a primeira etapa pode ser realizada de n_1 maneiras, a segunda etapa de n_2 maneiras (independentemente da escolha na primeira etapa), e assim por diante, até a k -ésima etapa que pode ser realizada de n_k maneiras, então o número total de maneiras de o processo ou evento completo ser realizado é dado pelo produto:

$$n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_k.$$

- O Princípio Multiplicativo é usado quando temos sequências de decisões em que a escolha em uma etapa não afeta as escolhas nas etapas seguintes. Pense em “e isso, e aquilo”.

Princípios Fundamentais da Contagem

Regra prática

- “OU” $\longrightarrow$ Soma
- “E” $\longrightarrow$ Multiplicação

Exemplo 2.3

De quantas maneiras diferentes você pode organizar 3 livros distintos (Matemática, História e Biologia) em uma prateleira?

Exemplo 2.4

Você quer ouvir 4 músicas distintas (A, B, C, D) em sequência. Quantas playlists diferentes pode criar?

Exemplo 2.5

Quantos anagramas possui a palavra AMORES?

Definição 2.3: Permutação

- Uma permutação é uma maneira de ordenar todos os elementos de um conjunto, onde a ordem dos elementos importa e não há repetição.
- O número de maneiras de ordenar n objetos distintos é

$$n! = n(n - 1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Exemplo 2.6

De quantas maneiras podemos organizar em fila indiana seis homens e seis mulheres em qualquer ordem?

Exemplo 2.7

Um grupo de 6 pessoas — Ana (A), Bruno (B), Carlos (C), Daniela (D), Eduardo (E) e Fernanda (F) — deve se sentar em uma fila de 6 assentos. De quantas formas eles podem sentar se:

- a. Carlos só pode sentar nas extremidades.
- b. Ana e Bruno não podem sentar juntos.

Definição 2.4: Permutação com Repetição

- Permutação com repetição ocorre quando queremos ordenar todos os elementos de um conjunto, onde a ordem importa e há elementos repetidos nesse conjunto.
- O número de divisões possíveis de n objetos distintos em r grupos distintos de tamanhos respectivos $n_1, n_2, \dots, n_r$ ($n_1 + n_2 + \dots + n_r = n$) é

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_r!}.$$

Exemplo 2.8

Determine quantos são os anagramas da palavra:

- a. MISSISSIPI
- b. ARARAQUARA
- c. BISCOITO
- d. ARARAQUARA que começam e terminam com A.

Exemplo 2.9

De quantas maneiras seis crianças podem se organizar para brincar de roda?

Exemplo 2.10

Uma empresa de tecnologia está organizando um jantar de confraternização. Para promover a interação, eles decidiram que os 7 diretores sentarão em uma mesa redonda giratória. De quantas maneiras distintas esses 7 diretores podem se sentar à mesa?

Definição 2.5: Permutação Circular

- O número de maneiras de dispor n objetos distintos em torno de um círculo é

$$(n - 1)!$$

- Nessa contagem, fixamos um objeto como referência para “travar” a rotação do círculo, restando apenas os outros $(n - 1)$ objetos para permutarem entre si.

Exemplo 2.11

Uma joalheira artesanal está criando um colar único usando 9 contas de cores diferentes. Ela quer saber de quantas maneiras distintas ela pode organizar essas 9 contas em um fio circular para montar o colar?

Exemplo 2.12

Quantos subconjuntos podem ser formados a partir do conjunto $C = \{1, 2, 3\}$?

Exemplo 2.13

Quantos conjuntos podem ser formados considerando o conjunto $D = \{\text{casa, pedra, bola, sapo}\}$?

Número de subconjuntos

O número de subconjuntos possíveis obtidos a partir de um conjunto com n elementos é 2^n .

- **Explicação:**

- Para cada elemento, temos 2 escolhas: “Estar no subconjunto” ou “Não estar”.
- Isso totaliza $2 \times 2 \times \dots \times 2 = 2^n$

Resumo

Técnica	Quando usar?	Equação
Princípio Aditivo	Quando as opções são exclusivas (Regra do “OU”).	$n_1 + n_2 + \dots + n_k$
Princípio Multiplicativo	Quando o processo tem etapas sucessivas (Regra do “E”).	$n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k$
Permutação Simples	Para ordenar todos os n objetos distintos em fila.	$n!$

Resumo

Técnica	Quando usar?	Equação
Permutação com Repetição	Quando há objetos idênticos que não geram nova ordem se trocados.	$\frac{n!}{n_1!n_2!...}$
Permutação Circular	Para dispor objetos em círculo.	$(n - 1)!$
Número de Subconjuntos	Para contar todas as combinações possíveis de grupos.	2^n

Fim