

Técnicas de Contagem (Parte 2)

ESTAT0072 – Probabilidade I

Prof. Dr. Sadraque E. F. Lucena

sadraquelucena@academico.ufs.br

Exemplo 3.1

A cantora Liniker foi convidada para um *pocket show* exclusivo para promover seu aclamado álbum *Caju* (2024), que contém 14 faixas. Devido ao tempo limitado, sua equipe artística definiu que apenas 5 músicas poderão ser executadas. Quantas possibilidades criativas diferentes existem para a cantora organizar esse *setlist*?

Exemplo 3.2

Em uma corrida com 10 atletas competindo, de quantos modos distintos podem ser conquistadas as medalhas de Ouro, Prata e Bronze?

Definição 3.1: Arranjo

- Um arranjo é uma maneira de selecionar e ordenar uma parte específica de um conjunto de elementos, onde a ordem dos elementos importa e não há repetição.
- O número de k subconjuntos ordenados de um conjunto com n elementos é

$$\begin{aligned}{}_n A_k &= \frac{n!}{(n-k)!} \\ &= n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+2)(n-k+1)\end{aligned}$$

Exemplo 3.3

Você foi contratado(a) como especialista em segurança digital para ajudar uma empresa a proteger seus dados. Eles precisam criar um código de acesso temporário para seus funcionários, com as seguintes regras:

- O código deve ter exatamente 4 caracteres distintos;
- Pode usar apenas as letras A, B, C, D e os algarismos 1, 2 e 3;
- A ordem dos caracteres importa ($A1B2 \neq 2B1A$).

Pergunta-se:

- a. Quantos códigos diferentes podem ser criados nessas condições?
- b. Quantos códigos tem uma letra na primeira posição?

Exemplo 3.4

Uma rede de supermercados fornece a seus clientes um cartão de crédito cuja identificação é formada por 3 letras distintas (dentre 26), seguidas de 4 algarismos distintos. Uma determinada cidade receberá os cartões que têm L como terceira letra, o último algarismo é zero e o penúltimo é 1. Qual a quantidade total de cartões distintos oferecidos por tal rede de supermercados para essa cidade?

Exemplo 3.5

Quantos números de 3 e de 4 algarismos distintos e maiores do que 300 podem ser formados com os algarismos 0, 1, 3, 5 e 7?

Exemplo 3.6

Considere os números de 3 algarismos formados com os dígitos 2, 3, 5, 8, e 9. Quantos são estes números? Quantos são ímpares?

Exemplo 3.7

Você e seus amigos estão indo para uma praia e você ficou responsável por escolher a sequência de 4 músicas no rádio. Você tem 6 artistas salvos no seu “Favoritos” (A, B, C, D, E, F) e pode repetir o mesmo artista na sequência. Seus amigos impuseram uma regra: como o artista “D” é muito calmo (MPB de dormir) e o artista “B” é muito agitado (Pagodão Baiano), a transição direta de D para B é proibida porque “estraga o clima”. Quantas sequências de 4 músicas você pode montar sem que o artista B toque logo após o artista D?

Definição 3.2: Arranjo com Repetição

Se temos um conjunto com n elementos distintos e queremos formar agrupamentos de p elementos com repetição, o número de arranjos possíveis é

$$n^p.$$

Combinação

- As combinações são subconjuntos onde a ordem dos elementos não importa.
- O número de k subconjuntos de um conjunto com n elementos é

$${}_nC_k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

- $\binom{n}{k}$ é chamado coeficiente binomial.
- Estes números podem ser arrumados em uma disposição triangular, o famoso .
- Propriedade: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Exemplo 3.8

Uma pizzaria oferece 8 ingredientes diferentes para montagem de pizzas: calabresa, frango, milho, palmito, bacon, brócolis, tomate seco e azeitona. De quantas maneiras diferentes um cliente pode escolher 3 ingredientes para sua pizza?

Exemplo 3.9

Numa prova de 10 questões, o aluno deve resolver apenas 6. De quantas maneiras diferentes ele poderá escolher essas 6 questões?

Exemplo 3.10

Um grupo de oito amigos foi acampar e levou duas barracas distintas, uma com capacidade máxima para três pessoas e a outra para cinco pessoas. De quantas formas distintas eles podem se agrupar para passar a noite, ficando cinco em uma barraca e três na outra?

Exemplo 3.11

Rodrigo está montando um aquário e adquiriu 4 troncos e 5 pedras para sua ornamentação. Considere que dentre os troncos ele deseja escolher um ou dois e dentre as pedras ele pretende escolher duas ou três. De quantas maneiras ele poderá fazer a escolha dos troncos e das pedras que irá utilizar?

Exemplo 3.12

Uma urna contém 5 bolas azuis e 4 bolas vermelhas. De quantas maneiras podemos selecionar:

- a. 3 bolas?
- b. 3 bolas azuis e 2 vermelhas?
- c. 3 bolas vermelhas e 2 azuis?

Combinação com Repetição

- Se temos n elementos distintos, dos quais queremos selecionar k elementos, onde:
 - a ordem não importa;
 - a repetição é permitida; e
 - não há restrição de quantidade por elemento,

então temos uma combinação com repetição, que é calculada por:

$$\binom{n + k - 1}{k} = \frac{(n + k - 1)!}{k!(n - 1)!},$$

Exemplo 3.13

Uma sorveteria oferece 5 sabores de sorvete: baunilha, chocolate, coco, uva e morango. Você quer montar um copo com 3 bolas, podendo repetir sabores. De quantas maneiras diferentes você pode montar esse copo, sem se importar com a ordem das bolas de sorvete?

Exemplo 3.14

Você tem moedas de 4 valores diferentes (5¢, 10¢, 25¢, 50¢) e quer dar 3 moedas de troco. De quantas maneiras diferentes pode fazer isso, considerando que pode usar moedas repetidas (ex: três de 10¢) e a ordem das moedas não importa (ex: 5¢ + 10¢ + 25¢ é igual a 10¢ + 25¢ + 5¢)?

Resumo

Técnica	Quando usar?	Equação
Arranjo Simples	Seleção de k itens entre n , onde a ordem importa e não há repetição.	$A_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$
Arranjo com Repetição	Seleção de k itens entre n , onde a ordem importa e os itens podem se repetir.	n^k

Resumo

Técnica	Quando usar?	Equação
Combinação Simples	Escolha de um subconjunto de k itens entre n , onde a ordem NÃO importa .	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
Combinação com Repetição	Escolha de k itens entre n tipos, a ordem NÃO importa e pode haver repetição.	$\binom{n+k-1}{k}$

Guia de Decisão: Qual técnica utilizar?

Para decidir qual fórmula aplicar, faça duas perguntas:

1. A ordem dos elementos importa?

- **Sim:** É um problema de **Arranjo** (ou Sequência).
- **Não:** É um problema de **Combinação** (ou Grupo/Conjunto).

2. Pode haver repetição de elementos?

- **Sim:** Use as fórmulas com repetição.
- **Não:** Use as fórmulas simples (fatoriais tradicionais).

Fim