

Probabilidade

ESTAT0072 – Probabilidade I

Prof. Dr. Sadraque E. F. Lucena

sadraquelucena@academico.ufs.br

O que é Probabilidade?

- A Probabilidade é a linguagem da incerteza. Em Estatística, estamos fundamentalmente interessados em **quantificar e modelar a incerteza** associada a fenômenos aleatórios.
- Ela nos permite:
 - Prever a frequência de ocorrência de eventos;
 - Tomar decisões informadas sob condições de risco;
 - Entender a variabilidade em dados e processos.

Mas, o que é um Fenômeno Aleatório?

- É um experimento ou observação cujo resultado não pode ser previsto com certeza absoluta, mesmo que as condições iniciais sejam idênticas.

Exemplos:

- Classificar itens que saem de uma linha de montagem como *defeituosos* ou *não defeituosos*. Qual a chance de um lote ter mais de X% de defeitos?
- Estimar a probabilidade de um paciente responder a um novo tratamento médico.
- Número de acidentes em uma cruzamento para justificar a instalação de um semáforo.

Definição 4.1: Experimento

- Qualquer processo que gera um conjunto de dados ou resultados.
- Pense nele como uma **ação** ou **observação** que podemos repetir (ou imaginar repetir) sob as mesmas condições.

Exemplos:

- Lançar uma moeda (observar face superior).
- Sortear uma carta de um baralho.
- Medir a altura de uma pessoa.
- Observar o número de e-mails de spam recebidos em um dia.

Definição 4.2: Espaço Amostral (Ω)

- É o conjunto de TODOS os resultados possíveis de um experimento.
- Representado pelo símbolo Ω (Ômega maiúscula).
- Cada resultado individual dentro do espaço amostral é chamado de **elemento** ou **ponto amostral**.

Exemplos

- **Experimento:** Lançar uma moeda.
 - **Espaço Amostral (Ω):** $\{Cara, Coroa\}$
 - **Pontos Amostrais:** Cara, Coroa
- **Experimento:** Classificar um produto (defeituoso/não defeituoso).
 - **Espaço Amostral (Ω):** $\{Defeituoso, Não Defeituoso\}$
- **Experimento:** Contar o número de carros que passam por um cruzamento em 1 minuto.
 - **Espaço Amostral (Ω):** $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ (Infinitos, mas enumeráveis!)

Outro Exemplo

Considere o experimento de jogar um dado de seis faces e observar a face voltada para cima. O espaço amostral é

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Atenção! Mais de um espaço amostral pode ser usado para descrever o mesmo experimento.

- Se estivermos interessados em saber se o número será par ou ímpar, o espaço amostral será simplesmente:

$$\Omega = \{\text{par}, \text{ímpar}\}.$$

Exemplo 4.1

Peças que saem de uma linha de produção são marcadas como defeituosa (D) e não defeituosa (N). As peças são inspecionadas e sua condição é registrada. Isto é feito até que duas peças defeituosas consecutivas sejam fabricadas ou que quatro peças tenham sido inspecionadas, aquilo que ocorrer primeiro. Descreva um espaço amostral para este experimento.

Definição 4.3: Evento

- Um **evento** é um **subconjunto** do espaço amostral (Ω).
 - Pense nele como uma coleção específica de um ou mais resultados de um experimento que nos interessa.
- Denotamos um evento por uma letra maiúscula. Ex.: A , B , C , etc.

Exemplo

Dado um espaço amostral $\Omega = \{t | t > 0\}$, onde t é o tempo em minutos que você espera o ônibus no ponto, então o evento A , em que o ônibus chega antes de 10 minutos é

$$A = \{t | 0 \leq t < 10\}.$$

Como um evento é um subconjunto do espaço amostral, **operações sobre conjuntos** podem ser utilizadas:

- a. $A \cup B$: ocorre A ou B ;
- b. $A \cap B$: ocorre A e B (simultaneamente);
- c. A^c : não ocorre A ;
- d. $\bigcup_{i=1}^n A_i$: ao menos um A_i ocorre (vale para $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$);
- e. $\bigcap_{i=1}^n A_i$: todos os A_i ocorrem (vale para $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$).

Definição 4.4: Eventos Mutuamente Excludentes

- Dois eventos A e B são denominados **mutuamente excludentes** se eles não puderem ocorrer juntos.
- Isto é, $A \cap B = \emptyset$.

Exemplo 4.3

Quais desses eventos são mutuamente excludentes?

- a. Um jogador de xadrez que dá um xeque-mate e perde o rei na mesma jogada.
- b. Um jogador de pôquer que tem um flush (todas as cartas do mesmo naipe) e três de um tipo na mesma mão de cinco cartas.
- c. Uma mãe que dá à luz uma menina e gêmeas no mesmo dia.
- d. Um time de futebol que perde o último jogo e ganha o Brasileirão.
- e. Um usuário tem sua conta bloqueada por tentativas de login e consegue acessar o sistema com sucesso no mesmo minuto.

Por que precisamos da Probabilidade?

- Em experimentos aleatórios, a gente não sabe qual resultado específico vai acontecer quando o experimento é feito.
- Ou seja, se A é um evento ligado a um experimento, não podemos ter certeza se A vai ocorrer ou não.
- Por isso, fica muito importante tentar associar um número ao evento A , que vai medir, de alguma forma, o quão provável é a ocorrência de A .
- Essa tarefa nos leva direto à teoria da probabilidade.

Definição 4.5: Frequência Relativa

- Suponha que repetimos n vezes um experimento e sejam A e B dois eventos. Admitamos que sejam, respectivamente, n_A e n_B o número de vezes que o evento A e o evento B ocorram nas n repetições.
- $f_A = n_A/n$ é denominada frequência relativa do evento A nas n repetições do experimento.

Propriedades da Frequência Relativa

A frequência relativa f_A apresenta as seguintes propriedades:

1. $0 \leq f_A \leq 1$: A frequência relativa de um evento sempre estará entre 0 e 1 (ou 0% e 100%).
2. $f_A = 1$ se, e somente se, A ocorrer em todas as n repetições:
Se o evento acontecer todas as vezes, sua frequência relativa será 1.
3. $f_A = 0$ se, e somente se, A nunca ocorrer nas n repetições: Se o evento nunca acontecer, sua frequência relativa será 0.
4. Se A e B forem mutuamente excludentes, $f_{A \cup B} = f_A + f_B$:
Se dois eventos não podem acontecer juntos, a frequência de um ou outro é a soma das frequências individuais.

Propriedades da Frequência Relativa

5. Com base em n repetições do experimento, f_A “converge” em certo sentido probabilístico para $P(A)$, quando $n \rightarrow \infty$: Esta é a Lei dos Grandes Números em essência. Significa que, quanto mais vezes você repetir um experimento, mais a frequência relativa de um evento se aproximará de sua verdadeira probabilidade.

Definição 4.6: Probabilidade

Seja E um experimento. Seja Ω o espaço amostral associado a E . A cada evento A associaremos um número real representado por $P(A)$ e denominado probabilidade de A , que satisfaz às seguintes propriedades:

- **P1.** $0 \leq P(A) \leq 1$: A probabilidade de qualquer evento está sempre entre 0 (impossível) e 1 (certo).
- **P2.** $P(\Omega) = 1$: A probabilidade de que algum resultado do espaço amostral ocorra (ou seja, de que o experimento aconteça) é 1.
- **P3.** Se A e B forem mutuamente excludentes, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$: Se dois eventos não podem acontecer ao mesmo tempo, a probabilidade de que um ou outro ocorra é a soma das suas probabilidades individuais.

- De P3, temos que $P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$. Esta é uma generalização importante da propriedade P3 para múltiplos eventos mutuamente excludentes.
- **P4.** Se $A_1, A_2, A_3, \dots$ forem, dois a dois, eventos mutuamente excludentes, então

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

- A escolha das propriedades da probabilidade apresentadas é obviamente **sugerida pelas características da frequência relativa**. Isso reforça a ideia de que a teoria da probabilidade formaliza o que observamos empiricamente ao repetir experimentos muitas vezes.

Resultados Decorrentes da Definição de $P(A)$

- R1. $P(\emptyset) = 0$.
- R2. $P(A^c) = 1 - P(A)$.
- R3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- R4. $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$.
- R5. $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$.

Exemplo 4.4

Suponha que A , B e C sejam eventos tais que

- $P(A) = P(B) = P(C) = 1/4$,
- $P(A \cap B) = P(C \cap B) = 0$ e
- $P(A \cap C) = 1/8$.

Calcule a probabilidade de que ao menos um dos eventos A , B ou C ocorra.

Espaço Amostral Finito

- Vamos caracterizar a probabilidade do evento A , $P(A)$.
- Seja $A = \{a\}$ um evento simples ou elementar (um único resultado possível).
- A cada evento simples $\{a_i\}$ associaremos um número p_i que satisfaz as seguintes condições:
 - a. $p_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, k$,
 - b. $p_1 + p_2 + \dots + p_k = 1$.
- Supondo agora que A é constituído por r resultados, $1 \leq r \leq k$ ($A = \{a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{jr}\}$), temos que:

$$P(A) = p_{j1} + p_{j2} + \dots + p_{jr}.$$

Exemplo 4.5

Um dado é lançado e todos os resultados se supõem igualmente verossímeis. O evento A ocorrerá se, e somente se, um número maior do que 4 aparecer. Qual a probabilidade do evento A ?

Exemplo 4.6

Uma moeda equilibrada é atirada duas vezes. Seja A o evento: “aparece uma cara”. Qual a probabilidade do evento A ?

Resultados Iguualmente Verossímeis

- Suponha que temos um espaço amostral $\Omega = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, com k resultados possíveis.
- Se todos os resultados forem igualmente verossímeis (ou seja, têm a mesma chance de acontecer), então a probabilidade de cada resultado elementar a_i será $p_i = 1/k$.
- Assim, para qualquer evento A formado por r resultados (ou seja, A tem r “casos favoráveis”), teremos:

$$P(A) = \frac{r}{k}.$$

Resultados Iguualmente Verossímeis

- Outra forma de expressar isso, e que é muito popular, é:

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favoráveis a } A}{\text{número total de casos}}.$$

- **Observação:** Esta expressão só é válida se todos os resultados forem igualmente verossímeis. Se não forem, você deve usar a soma das probabilidades p_i individuais que vimos antes.

Exemplo 4.7

Imagine que, ao final de um evento na escola, 10 alunos com emblemas numerados de 1 a 10 são sorteados para receber prêmios. Três alunos são escolhidos ao acaso e convidados a se apresentar simultaneamente no palco. Os números de seus emblemas são anotados.

- a. Qual é a probabilidade de que o menor número de emblema sorteado seja 5?
- b. Qual é a probabilidade de que o maior número de emblema sorteado seja 5?

Exemplo 4.8

Suponha que os três dígitos 1, 2 e 3 sejam escritos em ordem aleatória. Qual a probabilidade de que ao menos um dígito ocupe seu próprio lugar?

Exemplo 4.9

Em um jogo de tabuleiro, você tem 10 fichas numeradas de 1 a 10 dentro de um saco. Você tira duas fichas, uma de cada vez e sem colocar a primeira de volta. Qual é a probabilidade de que a soma dos números das duas fichas seja exatamente 10?

Exemplo 4.10

Um lote de lâmpadas elétricas foi fabricado, contendo 10 lâmpadas perfeitas, 4 com pequenos defeitos (que ainda funcionam) e 2 com defeitos graves (que não funcionam). Se uma lâmpada é escolhida ao acaso para teste, qual é a probabilidade de que:

- a. Ela não tenha defeitos?
- b. Ela não tenha defeitos graves?
- c. Ela seja perfeita OU tenha defeitos graves?

Exemplo 4.11

Suponha que de N objetos, n sejam escolhidos ao acaso, com reposição. Qual será a probabilidade de que nenhum objeto seja escolhido mais do que uma vez? (Admita $n < N$)

Exemplo 4.12

Você tem uma caixa cheia de etiquetas com números de 1 até n . Duas etiquetas são escolhidas ao acaso. Determine a probabilidade de que os números das etiquetas sejam inteiros consecutivos (como 3 e 4, ou 4 e 3) se:

- a. As etiquetas forem escolhidas uma após a outra, sem colocar a primeira de volta.
- b. As etiquetas forem escolhidas uma após a outra, colocando a primeira de volta.

Exemplo 4.13

Em uma rifa, um número é escolhido ao acaso dentre os números de 1 a 50. Qual será a probabilidade de que o número escolhido seja divisível por 6 ou por 8?

Exemplo 4.14

Dentre 6 números positivos e 8 negativos, escolhem-se ao acaso 4 números (sem reposição) e multiplicam-se esses números. Qual será a probabilidade de que o produto seja um número positivo?

Fim