

Probabilidade Condicional e Regra da Multiplicação

ESTAT0072 – Probabilidade I

Prof. Dr. Sadraque E. F. Lucena

sadraquelucena@academico.ufs.br

Exemplo 5.1

Você lança um dado comum de 6 faces e observa o número que aparece na face voltada para cima.

Considere estes dois eventos:

- A : “A face voltada para cima é um número par”
- B : “A face voltada para cima é um número maior que 4”

Qual é a probabilidade de que a face voltada para cima seja maior que 4, dado que sabemos que ela é um número par?

Definição 5.1: Probabilidade Condicional

- A probabilidade de que um evento B ocorra, dado que o evento A já ocorreu, é definida como:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)},$$

desde que $P(A) > 0$.

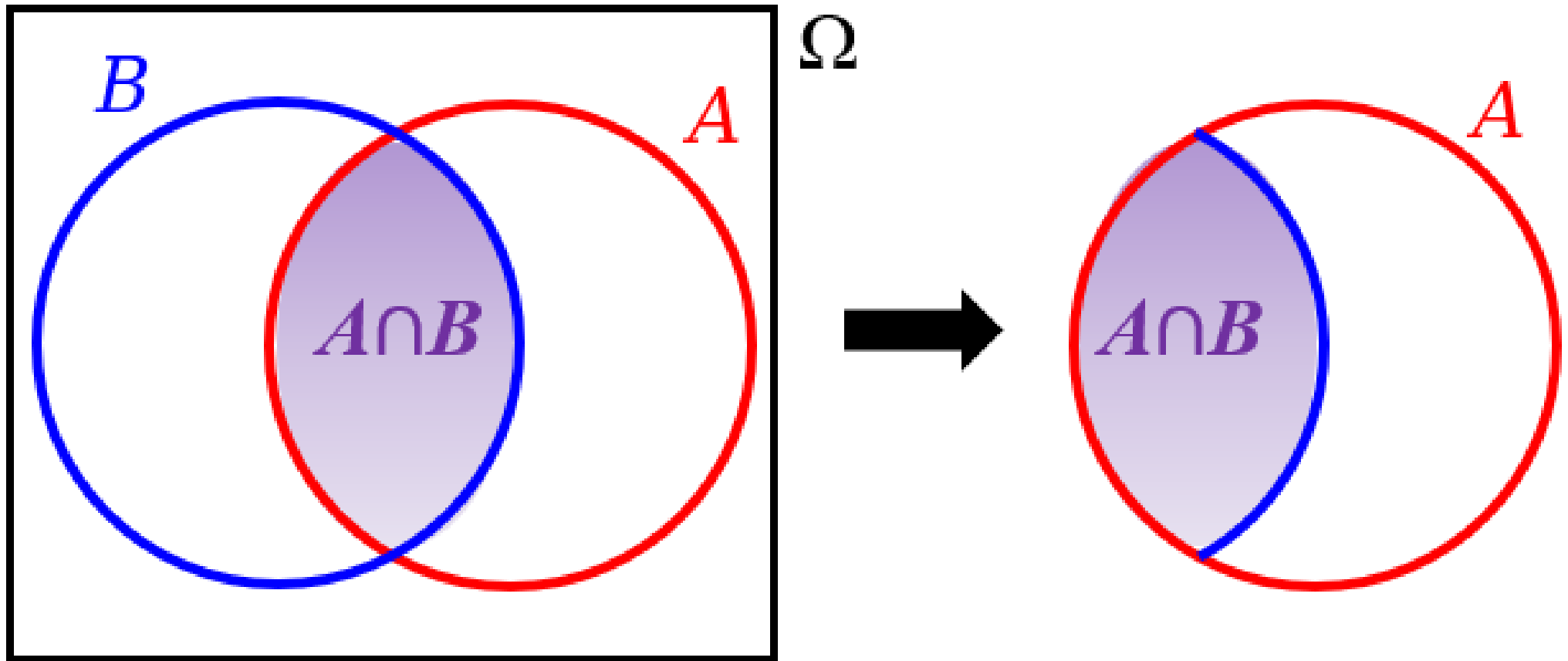
- $P(B|A)$ se lê como *probabilidade de B dado A* .

O que estamos buscando ao calcular $P(B|A)$?

- Estamos tentando descobrir a probabilidade de estar em B , sabendo que já estamos em A .

Reduzindo o Espaço Amostral

- Tradicionalmente, ao calcular probabilidades, consideramos todos os resultados possíveis no espaço amostral (Ω).
- No entanto, com a probabilidade condicional, a informação de que o evento A já ocorreu **muda nosso universo de possibilidades**.
- Agora, nosso novo “espaço amostral” se torna o próprio evento A . Não olhamos mais para Ω inteiro, mas apenas para os resultados que estão **dentro de A** .



Fonte: <http://clubes.obmep.org.br/blog/sala-de-estudo-probabilidades-sala-3/>

$P(B|A)$ é uma Probabilidade

- $P(B|A)$ também é uma medida de probabilidade que respeita todos os axiomas de Kolmogorov:
 1. $P(S|A) = 1$
 2. $P(B|A) \geq 0$
 3. Se B_1 e B_2 são mutuamente excudentes,
$$P(B_1 \cup B_2|A) = P(B_1|A) + P(B_2|A).$$
- Todas as regras que aprendemos na aula anterior (complementar, união, etc.) continuam valendo para probabilidade condicional.

Temos duas maneiras principais de calcular a probabilidade condicional $P(B \mid A)$:

1. Abordagem Direta (Espaço Amostral Reduzido):

- Consideramos diretamente a probabilidade de B dentro do novo e menor espaço amostral, que é o evento A .
- Pense: “Dos casos em que A acontece, quantos deles também fazem B acontecer?”

2. Abordagem pela Definição (Fórmula):

- Para usar essa abordagem, precisamos conhecer (ou conseguir calcular) a probabilidade da interseção de A e B , $P(A \cap B)$, e a probabilidade de A , $P(A)$.

Exemplo 5.2

Em uma pesquisa de opinião realizada com 800 indivíduos sobre a aceitação de uma nova política pública, os resultados foram tabulados por gênero da seguinte forma:

Categoria	Mulheres	Homens	Total
Aprovam	250	190	440
Desaprovam	120	240	360
Total	370	430	800

Se uma pessoa é selecionada aleatoriamente dessa pesquisa e sabemos que ela aprovou a nova política pública, qual é a probabilidade de que essa pessoa seja um homem?

Exemplo 5.3

Em um estudo de mercado recente sobre os hábitos de consumo de conteúdo digital, observou-se que 40% dos participantes assinam serviços de streaming de filmes. Além disso, o estudo revelou que 25% dos participantes assinam serviços de streaming de filmes e também são consumidores frequentes de documentários. Se um participante é selecionado aleatoriamente e sabemos que ele assina serviços de streaming de filmes, qual é a probabilidade de que ele também seja um consumidor frequente de documentários?

Exemplo 5.4

Em uma pesquisa recente com estudantes universitários, foram levantados dados sobre o consumo de plataformas de streaming. Os resultados mostraram que 70% dos estudantes utilizam uma plataforma de streaming de vídeo, enquanto 50% utilizam uma plataforma de streaming de música. Além disso, verificou-se que 85% dos estudantes utilizam pelo menos uma dessas duas plataformas (seja de vídeo ou de música). Com base nessas informações, se um estudante é selecionado aleatoriamente e sabemos que ele utiliza uma plataforma de streaming de vídeo, qual é a probabilidade de que ele também utilize uma plataforma de streaming de música?

Agora vamos mudar um pouco...

Exemplo 5.5

Um lote contém 20 peças defeituosas e 80 não-defeituosas. Qual a probabilidade de escolhermos duas peças defeituosas:

- a. com reposição?
- b. sem reposição?

Regra da Multiplicação

- Uma das consequências mais importantes da definição de probabilidade condicional é que podemos reorganizá-la:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B|A).$$

- Este resultado é conhecido como Regra da Multiplicação ou Teorema da Multiplicação para eventos quaisquer.
- **Lembre-se:** Use esta regra quando o evento B é influenciado ou depende da ocorrência do evento A .
 - No exemplo das peças, a probabilidade da segunda peça ser defeituosa depende se a primeira foi repostada ou não!

Exemplo 5.6

Em uma sala com 15 pessoas, há 6 homens e 9 mulheres. Duas pessoas são escolhidas aleatoriamente, uma após a outra, para receber um brinde. Qual é a probabilidade de que as duas sejam mulheres?

Regra da Multiplicação

- A regra da multiplicação pode ser generalizada para mais de dois eventos da seguinte maneira:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_n) = \\ P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdots P(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}).$$

Exemplo 5.7

Três cartas são escolhidas em sucessão, **sem reposição**, de um baralho comum de 52 cartas. Determine a probabilidade do evento $A_1 \cap A_2 \cap A_3$, onde:

- A_1 : a primeira carta escolhida é um **ás vermelho**.
- A_2 : a segunda carta escolhida é um **ás ou um valete**.
- A_3 : a terceira carta escolhida é **maior que 3, mas menor que 7** (ou seja, 4, 5 ou 6).

Resumo

Conceito	Intuição	Fórmula
Probabilidade Condicional	Probabilidade de B ocorrer sabendo que A já aconteceu.	$P(B A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$
Regra da Multiplicação	Probabilidade da interseção (ocorrência sucessiva de eventos).	$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B A)$

Fim