

Eventos Independentes

ESTAT0072 – Probabilidade I

Prof. Dr. Sadraque E. F. Lucena

sadraquelucena@academico.ufs.br

Por que Eventos Independentes Importam?

Imagine as seguintes situações:

- Você joga uma moeda duas vezes. O resultado do primeiro lançamento influencia o segundo?
- A disponibilidade de um caminhão de bombeiros afeta a disponibilidade de uma ambulância durante uma emergência?
- O desempenho das ações da Petrobras hoje influencia o desempenho das ações da Vale amanhã?

Por que Eventos Independentes Importam?

- **Modelar problemas reais:** Seja na engenharia, medicina, finanças ou em jogos, saber se eventos são independentes simplifica o cálculo de probabilidades complexas.
- **Tomar decisões melhores:** Se você sabe que a chuva não afeta o desempenho da sua equipe de futebol, pode focar em outras variáveis.
- **Construir bases sólidas:** A independência é um pilar para muitos conceitos avançados em Estatística, como inferência e modelagem estatística.

Exemplo 8.1

Suponha que um dado equilibrado seja jogado duas vezes.
Definimos os eventos:

- **A:** o primeiro dado mostra um número par;
- **B:** o segundo dado mostra um 5 ou 6.

Qual a probabilidade de que esses dois eventos ocorram?

Eventos Independentes

- Sejam A e B eventos independentes.
- Assim, a ocorrência do evento A não influencia o evento B e vice-versa.
- Então, podemos dizer que

$$P(B | A) = P(B) \quad \text{e} \quad P(A | B) = P(A).$$

- Além disso, existe uma definição adicional que também é válida e muito mais utilizada.

Eventos Independentes

- A e B são eventos independentes se, e somente se,

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Ou seja,

- Se os dois eventos forem independentes, a relação acima é válida.
- Além disso, se a relação acima é válida, os dois eventos são independentes.

Eventos Mutuamente Excludentes vs. Eventos Independentes: Não confunda!

Eventos Mutuamente Excludentes (ou Disjuntos)

- Se um evento acontece, o outro não pode acontecer. Eles não têm resultados em comum.
- A probabilidade da intersecção deles é zero:

$$P(A \cap B) = 0$$

- **Exemplo:** Lançar um dado e obter um 2 (evento A) e obter um 5 (evento B). Se você tira 2, não pode ter tirado 5 no mesmo lançamento.

Eventos Mutuamente Excludentes vs. Eventos Independentes: Não confunda!

Eventos Independentes

- A ocorrência de um evento não afeta a probabilidade de o outro ocorrer. Eles não têm “influência” um sobre o outro.
- A probabilidade da intersecção deles é o produto das suas probabilidades individuais:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

- **Exemplo:** Lançar uma moeda e obter cara e depois lançar a moeda novamente e obter coroa. O primeiro lançamento não muda as chances do segundo.

Exemplo 8.2

Uma pequena cidade possui um caminhão de bombeiros e uma ambulância para emergências. A probabilidade de que o caminhão de bombeiros esteja disponível quando necessário é de 0,98, e a probabilidade de que a ambulância esteja disponível é de 0,92. No caso de um ferimento causado por um incêndio em um prédio, qual é a probabilidade de que tanto a ambulância quanto o caminhão de bombeiros estejam disponíveis?

Exemplo 8.3

Uma carta é selecionada aleatoriamente de um baralho comum de 52 cartas. Sejam os eventos

- A : a carta selecionada é um ás;
- E : a carta selecionada é do naipe de espadas.

Os eventos A e E são independentes?

Exemplo 8.4

Suponha que joguemos um dado honesto duas vezes. Sejam os eventos

- ***A***: a soma dos dados é igual a 6;
- ***B***: o resultado do primeiro lançamento é igual a 4.

Pergunta-se:

- A* e *B* são independentes?
- Se *C* é o evento em que a soma dos dados é igual a 7, *B* e *C* são independentes?

Proposição 8.1

Se A é independente de B , então A é independente de B^c .

Demonstração

Temos que $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$. Como $A \cap B$ e $A \cap B^c$ são mutuamente excludentes e A e B são independentes,

$$\begin{aligned}P(A) &= P(A \cap B) + P(A \cap B^c) \\ \Rightarrow P(A) &= P(A)P(B) + P(A \cap B^c) \\ \Rightarrow P(A \cap B^c) &= P(A) - P(A)P(B) \\ \Rightarrow P(A \cap B^c) &= P(A)[1 - P(B)] \\ \Rightarrow P(A \cap B^c) &= P(A)P(B^c)\end{aligned}$$

Logo, A e B^c são independentes.

Independência de Mais de Dois Eventos

Três eventos A , B e C ditos independentes se

- $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$;
- $P(A \cap B) = P(A)P(B)$;
- $P(A \cap C) = P(A)P(C)$;
- $P(B \cap C) = P(B)P(C)$.

Independência de Mais de Dois Eventos

Dizemos que n eventos $A_1, A_2, \dots, A_n$ são independentes se, para cada subconjunto $A_1, A_2, \dots, A_r$ desses eventos, $r \leq n$,

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_r) = P(A_1)P(A_2)\dots P(A_r).$$

- Se tivermos um conjunto infinito de eventos, diremos que eles são independentes se cada subconjunto finito desses eventos for independente.

Exemplo 8.5

Uma moeda é adulterada para que a cara tenha duas vezes mais chances de ocorrer do que a coroa. Se a moeda for jogada três vezes, qual é a probabilidade de obter duas coroas e uma cara?

Exemplo 8.6

No lançamento de um dado dodecaédrico (12 faces), considere os eventos:

- A : “múltiplo de 3”
- B : “menor ou igual a 6”
- C : “par”

Verifique se os eventos A , B e C são independentes.

Exemplo 8.7

Considere o lançamento de um dado de 4 faces. Sejam

- A : “par”
- B : “menor que 3”
- C : “1 ou 4”

Os eventos A , B e C são independentes?

Resumo

- Eventos independentes são aqueles em que a ocorrência de um **não afeta a probabilidade** de ocorrência do outro.
- A forma mais direta de verificar ou usar a independência é através da probabilidade da intersecção:
$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$
- Para eventos independentes, a informação da ocorrência de um evento não muda a probabilidade do outro:
$$P(B | A) = P(B) \text{ e } P(A | B) = P(A).$$
- Lembre-se que independência dois a dois não garante independência simultânea de três ou mais eventos.

Fim