

Função de Distribuição Acumulada

ESTAT0072 – Probabilidade I

Prof. Dr. Sadraque E. F. Lucena

sadraquelucena@academico.ufs.br

Definição 10.1: Função de Distribuição Acumulada (FDA)

A Função de Distribuição Acumulada, denotada por $F(x)$, expressa a probabilidade de a variável aleatória X assumir um valor menor ou igual a um número real x :

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_j \leq x} P(X = x_j).$$

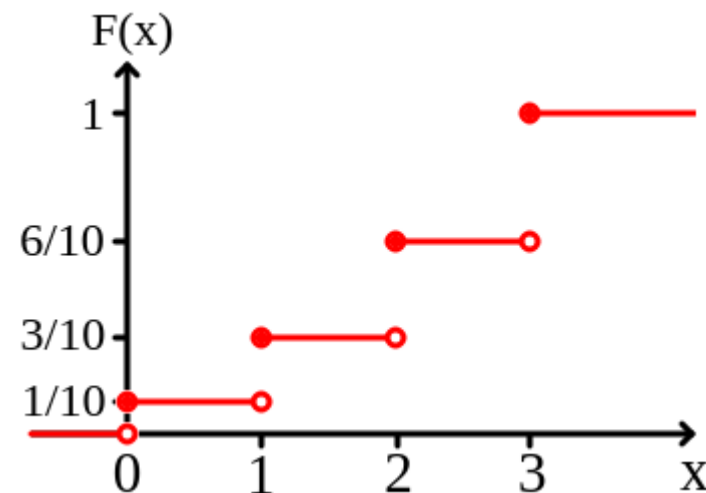
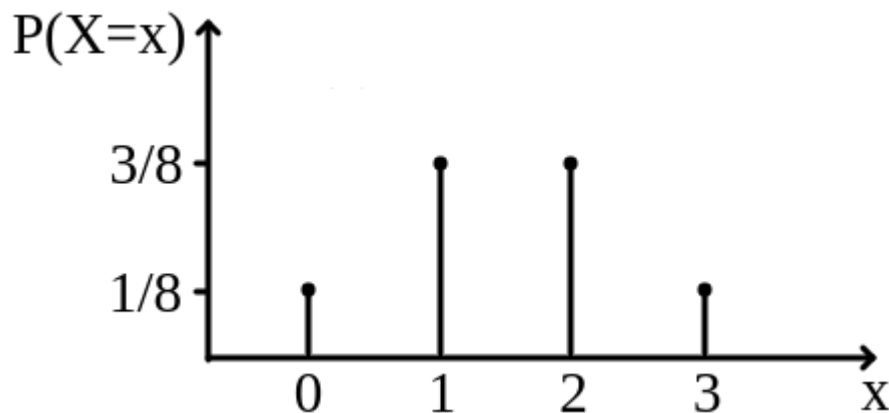
- **Intuição:** Enquanto a função de probabilidade (aula passada) foca em pontos isolados, a FDA foca no “passado” e no “presente” do valor x .

Propriedades Fundamentais

- **Limites:** $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$.
- **Monotonicidade:** $F(x)$ é uma função não-decrescente (nunca diminuir).
- **Continuidade à Direita:** Para variáveis discretas, a função dá um salto no ponto x , mas o valor do ponto pertence ao degrau de cima.
- **Cálculo de Intervalos:** $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$.

Gráfico da Função de Distribuição Acumulada

- O gráfico da função de distribuição acumulada tem forma de escada. Cada degrau ocorre exatamente nos valores de x .
- O tamanho do salto no ponto x é exatamente a probabilidade pontual $P(X = x)$.
- Exemplo:



Exemplo 10.1

Dada a função de distribuição acumulada abaixo:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 0,3, & 1 \leq x < 3 \\ 0,7, & 3 \leq x < 4 \\ 1, & x \geq 4 \end{cases}$$

- Determine o suporte da variável aleatória X .
- Encontre a função de probabilidade $P(X = x)$ para cada valor do suporte.
- Calcule $P(X \leq 3)$ e $P(X > 3)$.

Exemplo 10.2

Considere a V.A. X com FDA dada por

- $F(0) = 0, 1;$
- $F(1) = 0, 4;$
- $F(2) = 0, 8;$
- $F(3) = 1, 0.$

Calcule:

- a. $P(1 < X \leq 3)$
- b. $P(X \geq 2)$ usando a regra do complementar via FDA.
- c. $P(0,5 < X < 2,5)$

Exemplo 10.3

Uma moeda viciada tem probabilidade de cara igual a 0,6. Lança-se esta moeda 2 vezes. Seja X o número de caras obtido.

- Determine a função de probabilidade de X .
- Escreva a expressão analítica da FDA $F(x)$ (usando a notação de chaves por intervalos).
- Esboce o gráfico da FDA.

Exemplo 10.4

O número de falhas por hora em um servidor, X , possui a seguinte FDA:

$$F(x) = 1 - (0,5)^{x+1} \text{ para } x \in \{0, 1, 2, \dots\}$$

- Calcule a probabilidade de ocorrerem no máximo 2 falhas em uma hora.
- Calcule a probabilidade de ocorrerem exatamente 3 falhas.
(Lembre-se: $P(X = x) = F(x) - F(x - 1)$).

Fim