

Distribuições de Bernoulli e Binomial

ESTAT0072 – Probabilidade I

Prof. Dr. Sadraque E. F. Lucena

sadraquelucena@academico.ufs.br

Distribuição de Bernoulli

- Podemos interpretar o resultado de um experimento como tendo dois resultados possíveis.
 - Ocorre ou não um sinistro em uma apólice de seguro;
 - Uma peça produzida apresenta defeito ou não;
 - Uma aluna tira uma nota maior ou igual a 5 ou não;
 - Uma pessoa apresenta uma doença ou não.
- Quando um experimento é realizado apenas uma vez e interpretamos o resultado como sucesso ou fracasso, temos um experimento de Bernoulli.

Definição 13.1: Distribuição de Bernoulli

- Um experimento de Bernoulli é um experimento aleatório que possui dois resultados possíveis:
 - um é chamado **sucesso** ($X = 1$)
 - e o outro de **fracasso** ($X = 0$).
- A probabilidade de sucesso é $P(X = 1) = p$.
- A probabilidade de fracasso é $P(X = 0) = 1 - p$.
- Podemos então escrever o seguinte:
 - Se X é uma variável aleatória de Bernoulli, sua função de probabilidade é

$$P(X = x) = p^x(1 - p)^{1-x}, \quad x = 0, 1$$

- **Notação:** $X \sim \text{Bernoulli}(p)$

Exemplo 13.1

Um dado de seis faces é lançado. Seja X : a face voltada para cima é igual a 2. Indique a distribuição X e explicita sua função de probabilidade.

Teorema 13.1

- Se $X \sim \text{Bernoulli}(p)$, a esperança e a variância são, respectivamente, iguais a

$$E(X) = p$$

e

$$\text{Var}(X) = p(1 - p).$$

Exemplo 13.2

Um dado de seis faces é lançado. Seja X : a face voltada para cima é igual a 2. Qual o valor esperado de X e sua variância?

Definição 13.2: Distribuição Binomial

- Considere que p é a probabilidade de sucesso em um experimento e $1 - p$ é a probabilidade de fracasso.
- Suponha que vamos repetir o experimento n vezes em que cada repetição é independente da outra.
- Se X é o número de sucesso nas n repetições do experimento, dizemos que X tem distribuição binomial e calculamos a probabilidade usando

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \dots, n.$$

- **Notação:** $X \sim \text{Binomial}(n, p)$.

Distribuição Binomial

- Note que a soma das probabilidades é igual a 1, pois

$$\begin{aligned}\sum_{x=0}^n P(X = x) &= \sum_{x=0}^n \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x} \\ &= [p + (1 - p)]^n \\ &= 1^n \\ &= 1\end{aligned}$$

- Note também que X é a soma de n realizações independentes de um experimento de Bernoulli(p).

Distribuição Binomial

Como identificar a distribuição binomial:

- O experimento é realizado um número fixo de vezes (n).
- Cada tentativa é independente das demais.
- A probabilidade de sucesso (p) é constante em cada tentativa.
- A variável de interesse X é o número de sucessos.

Teorema 13.2

- Se $X \sim \text{Binomial}(n, p)$, o valor esperado e a variância são dados da seguinte forma:

$$E(X) = np$$

e

$$\text{Var}(X) = np(1 - p).$$

Exemplo 13.3

A probabilidade de que um(a) eleitor(a) vote em uma candidata é $3/4$.

- a. Se 10 pessoas são entrevistadas em uma pesquisa eleitoral, determine a probabilidade de que exatamente duas votem na candidata.
- b. Qual a probabilidade de que pelo menos 1 pessoa votem na candidata?
- c. Qual o número esperado de eleitores da candidata entre essas 10 pessoas?
- d. Qual a variância?

Exemplo 13.4

Uma carteira possui 20 automóveis segurados. A probabilidade de ocorrer um sinistro em um automóvel dessa carteira e acionar o seguro é de 10%.

- a. Qual o número esperado de carros que acionarão o seguro?
- b. Qual a variância?
- c. Qual a probabilidade de que 5 carros precisarem acionar o seguro por causa de um sinistro?
- d. a probabilidade de que de 2 a 4 carros acionem o seguro?
- e. Qual a probabilidade de que pelo menos 1 carro acione o seguro?

Distribuição Binomial no R



Para calcular no R (você pode baixar o aplicativo **R Compiler** no seu smartphone)

- $P(X = x)$ use o comando `dbinom(x, n, p)`.
- $P(X \leq x)$ use o comando `pbinom(x, n, p)`.
- Exemplo: $X \sim \text{Binomial}(n = 27, p = 0.65)$.

```
dbinom(12, 27, 0.65) # P(X=12)
```

```
[1] 0.01432607
```

```
pbinom(12, 27, 0.65) # P(X≤12)
```

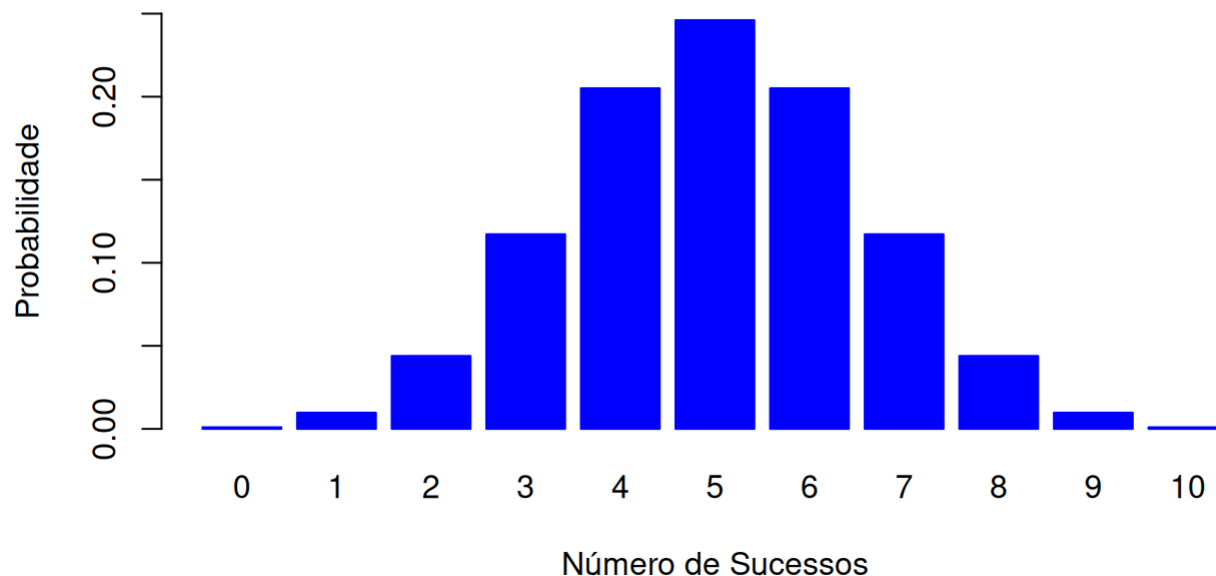
```
[1] 0.02292425
```

Distribuição Binomial no R



Gráfico da dist. Binomial para $X \sim \text{Binomial}(n = 10, p = 0.5)$.

```
n <- 10; p <- 0.5  
barplot(dbinom(0:n, n, p), names.arg = 0:n,  
        xlab = "Número de Sucessos", ylab = "Probabilidade",  
        col = "blue", border = "blue", ylim = c(0, .25))
```



Resumo

Distribuição	Bernoulli (p)	Binomial (n, p)
Contexto	Um único ensaio	n ensaios independentes
Suporte (R_X)	$\{0, 1\}$	$\{0, 1, 2, \dots, n\}$
$P(X = x)$	$p^x(1 - p)^{1-x}$	$\binom{n}{x} p^x(1 - p)^{n-x}$
$E[X]$	p	np
$Var(X)$	$p(1 - p)$	$np(1 - p)$
Comando no R	<code>dbinom(x, 1, p)</code>	<code>dbinom(x, n, p)</code>

Fim