

Distribuição de Poisson

ESTAT0072 – Probabilidade I

Prof. Dr. Sadraque E. F. Lucena

sadraquelucena@academico.ufs.br

Definição 16.1: Distribuição de Poisson

- Seja X uma variável aleatória com distribuição de Poisson de parâmetro λ . Sua função de probabilidade é dada por

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots,$$

em que

- λ é o número médio de resultados por unidade de tempo, distância, área ou volume e
- $e = 2,71828 \dots$
- **Notação:** $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$.

Teorema 16.1

Se $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$, a esperança e a variância são

$$E(X) = \lambda$$

e

$$\text{Var}(X) = \lambda.$$

Distribuição de Poisson

Como identificar a distribuição de Poisson:

- X representa o número de resultados que ocorrem em certo intervalo de tempo ou espaço.
- Sempre será dada a média com que ocorre o fenômeno no tempo ou no espaço.

Distribuição de Poisson

Exemplos de variáveis aleatórias com distribuição de Poisson:

- Erros tipográficos por página, em um material impresso;
- Carros que passam por um cruzamento, por minuto, num intervalo de 1 hora;
- Defeitos por unidade (m , m^2 , m^3 , etc.) por peça fabricada;
- Mortes por ataque do coração por ano, numa cidade.

Exemplo 16.1

Seja $X \sim \text{Poisson}(2)$. Calcule

a. $P(X = 3)$

b. $P(X \geq 2)$

Distribuição de Poisson no R



Para calcular no R:

- $P(X = x)$ use o comando `dpois(x,  $\lambda$ )`.
- $P(X \leq x)$ use o comando `ppois(x,  $\lambda$ )`.

Exemplo: $X \sim \text{Poisson}(2)$.

```
dpois(3, 2) # P(X=3)
```

```
[1] 0.180447
```

```
ppois(3, 2) # P(X≤3)
```

```
[1] 0.8571235
```

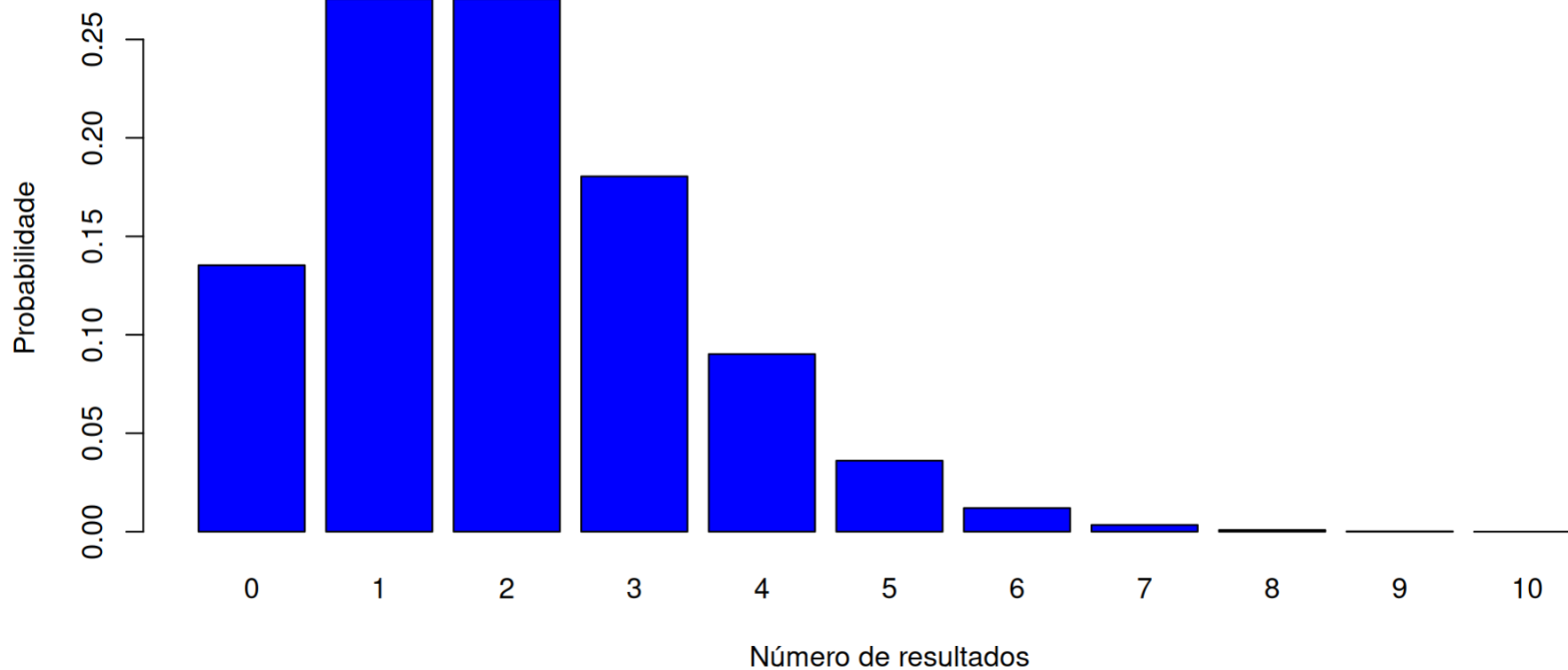
Distribuição de Poisson no R



Gráfico da distribuição de Poisson no R para $X \sim \text{Poisson}(\lambda = 2)$.

```
lambda <- 2  
barplot(dpois(0:10, lambda),  
        names.arg = 0:10,  
        xlab = "Número de resultados",  
        ylab = "Probabilidade",  
        col = "blue",  
        border = "black")
```

Distribuição de Poisson no R



Exemplo 16.2

Uma central telefônica recebe uma média de 5 chamadas por minuto. Qual é a probabilidade da central receber

- a. nenhuma chamada em um minuto?
- b. no máximo duas chamadas em um minuto?
- c. mais de três chamadas em um minuto?

Exemplo 16.3

Um corretor vende em média 4 seguros por semana.

- a. Qual é a probabilidade de que ele venda seis seguros naquela semana?
- b. Qual é a probabilidade de que ele venda menos de três seguros naquela semana?
- c. Qual a probabilidade de que ele venda seis seguros em duas semanas?
- d. Qual a probabilidade de que ele venda menos de três seguros em duas semanas?

Exemplo 16.4

Num livro de 800 páginas há 800 erros de impressão. Qual a probabilidade de que uma página contenha

- a. pelo menos 3 erros?
- b. no máximo 1 erro?

Aproximação da Binomial pela Poisson

- Quando o número de ensaios n é muito grande e a probabilidade de sucesso p é muito pequena, a distribuição Binomial se aproxima de uma distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda = np$.
- A aproximação é considerada excelente quando:

$$n \geq 100 \quad \text{e} \quad np \leq 10 \quad (\text{ou } p \leq 0,1)$$

- Por que utilizar?
 - Calcular $\frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$ é muito mais rápido do que lidar com combinações de grandes números $\binom{n}{x}$.
 - Evita erros de arredondamento em calculadoras e softwares ao processar fatoriais imensos.

Aproximação da Binomial pela Poisson

- **Exemplo:** Se uma fábrica produz 2.000 lâmpadas e a chance de defeito é de 0,2% ($p = 0,002$):
 - Pela Binomial: $X \sim \text{Binomial}(2000; 0,002)$
 - Pela Poisson: $X \sim \text{Poisson}(\lambda = 2000 \cdot 0,002 = 4)$

Fim