Universidade Federal de Sergipe
Departamento de Estatística e Ciências Atuariais
Disciplina: Inferência I
Professor: Sadraque E.F. Lucena

Lista de Exercícios 11

11.1) Explique a diferença fundamental entre uma Estatística e uma Quantidade Pivotal. Por que não podemos usar uma Estatística diretamente para construir um intervalo de confiança sem transformá-la em um pivô?

11.2) Considere uma amostra de uma população $N(\mu, \sigma^2)$. Se o objetivo é construir um intervalo para a média μ, explique por que a quantidade $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ deixa de ser pivotal se o valor de σ^2 for desconhecido.

11.3) Após coletar os dados e realizar os cálculos, um atuário chega ao intervalo de confiança $[850, 1.150]$ para o valor médio de sinistros, com 95% de confiança. Avalie a afirmação: "*Existe uma probabilidade de 95% de que a verdadeira média populacional esteja contida entre 850 e 1.150.*" Ela está correta? Justifique sua resposta.

11.4) Mantendo todos os outros fatores constantes (mesma variância e mesma média amostral), descreva o que acontece com a amplitude (largura) do intervalo de confiança quando:

(a) Aumentamos o nível de confiança (ex: de 90% para 99%).

(b) Aumentamos o tamanho da amostra (n).

11.5) A altura de ondas em oceanografia segue uma distribuição de Rayleigh com parâmetro σ. Sabe-se que se $X \sim Rayleigh(\sigma)$, então $Q = \frac{X^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_2$ (Qui-quadrado com 2 graus de liberdade). Se observarmos uma única onda com $x = 4$ metros, monte o IC de 95% para o parâmetro σ. (Dados: $\chi^2_{2;0,025} = 0,05$ e $\chi^2_{2;0,975} = 7,38$).

11.6) A distribuição de Pareto é muito usada em Atuária para modelar grandes perdas. Seja X uma perda que segue uma Pareto com parâmetro de forma α (e mínimo 1), tal que $f(x;\alpha) = \alpha x^{-(\alpha+1)}$. Sabe-se que $Q = \alpha \cdot \log(X)$ segue uma distribuição Exponencial de média 1. Para uma perda observada $x = 10$, isole α e encontre um IC de 90% para esse parâmetro. (Dica: Para $Exp(1)$, os quantis de 5% e 95% são $0,051$ e $2,99$).

11.7) O tempo de falha de um sensor segue uma Weibull com parâmetro de escala λ e forma $k = 2$ (conhecido). A quantidade $Q = (X/\lambda)^2$ segue uma distribuição Exponencial de média 1. Se o sensor falhou em $x = 100$ horas, determine o IC de 95% para o parâmetro de escala λ.

11.8) A distribuição de Cauchy é famosa por não ter média definida, mas possui um parâmetro de localização θ. Se $X \sim Cauchy(\theta, 1)$, então $Q = X - \theta$ segue uma distribuição Cauchy Padrão (livre de θ).Se os quantis de 2,5% e 97,5% da Cauchy Padrão são $-12,7$ e $12,7$, e observamos $x = 5$, qual o IC de 95% para o centro da distribuição θ?

11.9) Se X segue uma Log-Normal, então $Y = \log(X)$ segue uma $N(\mu, \sigma^2)$. Suponha $\sigma^2 = 1$ conhecido.Mostre que $Q = \log(X) - \mu$ é uma quantidade pivotal e use-a para montar a fórmula do IC para μ baseado em uma única observação X.

11.10) Em um processo de Poisson, o tempo até a k-ésima ocorrência segue uma distribuição Gama. Para $k = 2$ (fixo), a variável X tem densidade que depende de um parâmetro de taxa β. Sabe-se que $Q = 2\beta X \sim \chi^2_4$. Se o segundo evento ocorreu no tempo $x = 15$, monte o IC de 90% para a taxa β. (Dados: $\chi^2_{4;0,05} = 0,71$ e $\chi^2_{4;0,95} = 9,49$).

11.3) A afirmação está incorreta.

11.4) (a) A amplitude aumenta.

(b) A amplitude diminui.

11.5) $IC(\sigma; 95\%) = [1,47; 17,89]$ metros.

11.6) $IC(\alpha; 90\%) = [0,022\,;\; 1,30]$

11.7) $IC(\lambda; 95\%) = [52,06\,;\; 632,45]$ horas.

11.8) $IC(\theta; 95\%) = [-7,7\,;\; 17,7]$

11.9) $IC(\mu) = [\log(X) - z_{\alpha/2}\,,\; \log(X) + z_{\alpha/2}]$

11.10) $IC(\beta; 90\%) = [0,024\,;\; 0,316]$