Universidade Federal de Sergipe
Departamento de Estatística e Ciências Atuariais
Disciplina: Inferência I
Professor: Sadraque E.F. Lucena

Lista de Exercícios 9

9.1) Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da distribuição Rayleigh com parâmetro de escala $\sigma > 0$. A função de densidade de probabilidade é dada por:

$$f(x; \sigma) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \quad x > 0$$

Sabendo que o valor esperado dessa distribuição é $E(X) = \sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}$:

(a) Obtenha o estimador de σ pelo Método dos Momentos.

(b) Verifique se este estimador é não-viesado.

9.2) Uma amostra aleatória da distribuição Uniforme$(0, \theta)$ foi obtida, sendo observados os valores:

$$3,05 \quad 2,03 \quad 3,63 \quad 0,18 \quad 4,57 \quad 0,66 \quad 4,51 \quad 0,83 \quad 1,70 \quad 4,80$$

Estime o valor de θ pelo método dos momentos. Com base nesse resultado, a estimativa faz sentido considerando que o máximo valor observado foi 4,80?

9.3) Em sete segundas-feiras consecutivas foram registrados $0, 1, 3, 4, 5, 2$ e 1 acidentes em um cruzamento de duas vias. Assumindo que o número de acidentes segue uma distribuição de Poisson:

(a) Estime o parâmetro λ pelo método dos momentos.

(b) Qual a probabilidade estimada de ocorrerem entre 2 e 3 acidentes (inclusive) neste cruzamento na próxima segunda-feira?

9.4) Obtenha o estimador pelo método dos momentos para o parâmetro p da distribuição Geométrica, cuja função de probabilidade é dada por $P(X = x) = (1-p)^{x-1}p$, para $x = 1, 2, \ldots$.

9.5) Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória a partir da f.d.p. $f(x) = \theta x^{-2}$, para $0 < \theta \leq x < \infty$. Encontre o estimador do método dos momentos para θ.

9.6) Seja $X \sim$ Uniforme$(-\theta, \theta)$, com $\theta > 0$.

(a) Mostre que o primeiro momento populacional $E(X)$ não fornece informações sobre θ.

(b) Obtenha o estimador de momentos para θ utilizando o segundo momento $E(X^2)$.

9.7) Considere uma amostra aleatória de uma distribuição Gama com parâmetros α e β, onde $E(X) = \alpha/\beta$ e $Var(X) = \alpha/\beta^2$. Demonstre que os estimadores de momentos são dados por:

$$\widehat{\alpha}_{MM} = \frac{\overline{X}^2}{S^2} \quad \text{e} \quad \widehat{\beta}_{MM} = \frac{\overline{X}}{S^2}$$

onde $S^2 = \frac{1}{n}\sum(X_i - \overline{X})^2$ é a variância amostral (denominador n).

9.8) Seja X uma variável aleatória com função de densidade dada por $f(x) = \theta x^{\theta-1}$, para $0 < x < 1$ e $\theta > 0$. Obtenha o estimador de θ pelo método dos momentos.

9.9) A distribuição Normal Inversa é frequentemente utilizada em Ciências Atuariais para modelar o tempo até a ocorrência de um evento ou valores de sinistros. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória com f.d.p. dada por:

$$f(x;\mu,\lambda) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi x^3}} \exp\left(-\frac{\lambda(x-\mu)^2}{2\mu^2 x}\right), \quad x > 0.$$

Sabendo que os momentos populacionais são dados por:

$$E(X) = \mu \quad \text{e} \quad Var(X) = \frac{\mu^3}{\lambda}$$

Obtenha os estimadores de μ e λ pelo Método dos Momentos.

9.10) Considere a distribuição Exponencial Deslocada com f.d.p. dada por:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda(x-\mu)}, \quad x \geq \mu, \quad \lambda > 0$$

Sabendo que $E(X) = \mu + \frac{1}{\lambda}$ e $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$, obtenha os estimadores de momentos para μ e λ.

9.11) Explique, com suas palavras, a lógica fundamental do Princípio da Analogia (Substituição) utilizado no Método dos Momentos. Por que a Lei dos Grandes Números justifica esse procedimento?

9.12) Frequentemente, em provas do IBA e concursos públicos, compara-se o Método dos Momentos (MM) com o Método da Máxima Verossimilhança (MV). Julgue as afirmações abaixo como Verdadeiras ou Falsas e justifique:

(a) Os estimadores de momentos são sempre não-viesados.

(b) Sob condições de regularidade, os estimadores de momentos são consistentes.

(c) Em geral, os estimadores de momentos são mais eficientes (menor variância) que os estimadores de máxima verossimilhança.

(d) Os estimadores obtidos pelo Método dos Momentos baseiam-se necessariamente em estatísticas suficientes, garantindo que nenhuma informação da amostra seja desperdiçada.

(e) Devido à simplicidade das equações resultantes, os estimadores de momentos são frequentemente utilizados como “chute inicial” para algoritmos numéricos de Máxima Verossimilhança.

(f) O Método dos Momentos garante matematicamente que a estimativa obtida estará sempre dentro do espaço paramétrico válido (ex: garante que uma probabilidade estimada estará sempre entre 0 e 1).

9.13) Considere a distribuição de Cauchy, cuja f.d.p. é $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$, para $x \in \mathbb{R}$. É possível estimar o parâmetro de localização desta distribuição utilizando o Método dos Momentos tradicional? Justifique sua resposta baseando-se na definição de esperança matemática.

9.14) Considere uma amostra simples de tamanho $n = 4$ contendo os valores $x = \{0, 0, 10, 10\}$. Um analista propõe ajustar uma distribuição Binomial(m, p) para esses dados, onde ambos os parâmetros são desconhecidos.

(a) Calcule a média amostral $(\overline{X})$ e a variância amostral $\widehat{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})/n$.

(b) Tente estimar m e p pelo Método dos Momentos.

(c) O resultado faz sentido estatístico? O que isso prova sobre a confiabilidade do Método dos Momentos em relação ao espaço paramétrico?

9.15) Uma crítica comum ao Método dos Momentos é que ele nem sempre utiliza estatísticas suficientes. O que isso significa em termos de "perda de informação"? Dê um exemplo intuitivo de onde a média amostral sozinha pode não capturar toda a informação sobre a forma da distribuição.

9.1) (a) $\widehat{\sigma}_{MM} = \frac{\overline{X}}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}$

(b) Não-viesado.

9.2) $\widehat{\theta}_{MM} = 5,192$

9.3) (a) $\widehat{\lambda}_{MM} = 2,29$

(b) 0,4682

9.4) $\widehat{p}_{MM} = 1/\overline{X}$

9.5) Não há.

9.6) (b) $\widehat{\theta}_{MM} = \sqrt{\frac{3\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n}}$

9.8) $\widehat{\theta}_{MM} = \frac{\overline{X}}{1-\overline{X}}$

9.9) $\widehat{\mu}_{MM} = \overline{X}$ e $\widehat{\lambda}_{MM} = \frac{n\overline{X}^3}{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}$

9.10) $\widehat{\mu}_{MM} = \overline{X} - \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{n}}$ e $\widehat{\lambda}_{MM} = \sqrt{\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}}$

9.12) (a) Falso

(b) Verdadeiro

(c) Falso

(d) Falso

(e) Verdadeiro

(f) Falso

9.13) Não

9.14) (a) $\overline{x} = 5$ e $\widehat{\sigma}^2 = 25$

(b) $\widehat{p}_{MM} = -4$ e $\widehat{m}_{MM} = -5/4$

(c) Não faz sentido. O Método dos Momentos não garante que as estimativas caiam dentro do espaço paramétrico válido.