Distribuições Amostrais

ESTAT0078 – Inferência I

Prof. Dr. Sadraque E. F. Lucena

sadraquelucena@academico.ufs.br

http://sadraquelucena.github.io/inferencia1

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

- Cramér (1945):
  - O objetivo fundamental da Teoria Estatística consiste em investigar a possibilidade de extrair dos dados inferências válidas.

Definição 2.1: Inferência Estatística

- Seja X uma variável aleatória com função de densidade (ou de probabilidade) de parâmetro θ, denotada por $f(x|\theta)$, e que não conhecemos o valor de θ que representa a distribuição de X.
- Chamamos de **inferência estatística** o problema que consiste em especificar um ou mais valores para θ, com base em uma amostra de valores observados de X.

Tipos de problemas

1. **Problema de estimação:** o objetivo é procurar, segundo algum critério especificado, valores que representem adequadamente os parâmetros desconhecidos.
    - **Exemplo:** Estimar a idade média μ da população de estudantes matriculados na UFS.

Tipos de problemas

2. **Teste de hipóteses:** o objetivo é verificar a validade de afirmações sobre o valor de um ou mais parâmetros desconhecidos.
    - **Exemplo:** Verificar se a proporção p de eleitores em determinada candidata é maior que 50% (ou 1/2) na população.
        - **Hipóteses:** $H_0 : p \leq 1/2$ contra $H_1 : p > 1/2$.
    - **Exemplo:** Verificar se o peso médio, μ, de pacotes de 1 kg empacotados por determinada máquina realmente é 1 kg.
        - **Hipóteses:** $H_0 : \mu = 1$ contra $H_1 : \mu \neq 1$.

Definição 2.2: População

O conjunto de valores de uma característica observável associada a uma coleção de indivíduos ou objetos de interesse é dito ser uma **população**.

- A população é representada por uma variável aleatória X que descreve a característica de interesse.

Exemplos:

- Todas as transações de cartão de crédito realizadas em um país durante o ano de 2023.
- Todos os segurados de uma companhia de seguros de saúde.

Definição 2.3: Amostra

Qualquer parte (ou subconjunto) de uma população. A amostra é composta por n valores observados de uma característica de interesse, representados por variáveis aleatórias $X_1, \ldots, X_n$. Ela é utilizada para fazer inferências sobre a população da qual foi retirada.

Exemplos:

- Um conjunto de 1.000 transações de cartão de crédito realizadas em um país durante o ano de 2023.
- Uma amostra de 500 segurados de uma companhia de seguros de saúde.

Definição 2.4: Parâmetro

Quantidade numérica que caracteriza uma determinada população.

- Em estatística, parâmetros são valores desconhecidos que descrevem as distribuições de variáveis aleatórias. Exemplos comuns de parâmetros incluem a média (μ), a variância (σ^2) e a proporção (p).

Exemplo: Na distribuição normal $N(\mu, \sigma^2)$, os parâmetros são

- μ (média)
- σ^2 (variância).

Definição 2.5: Espaço Paramétrico

Conjunto de todos os valores possíveis que os parâmetros de um modelo estatístico podem assumir.

- Ele define as restrições e o domínio dos parâmetros que são utilizados na modelagem de distribuições de probabilidades.
- Geralmente denota-se por Θ.

Exemplo: Para a distribuição $N(\mu, \sigma^2)$, o espaço paramétrico é dado por

$$\Theta = \{(\mu, \sigma^2) : -\infty < \mu < \infty, \sigma^2 > 0\}.$$

Definição 2.6: Estatística

Qualquer função $\hat{\theta} = T(X_1, \dots, X_n)$ da amostra que não depende de parâmetros desconhecidos é denominada uma .

Exemplos:

- $X_{(1)} = \min(X_1, \dots, X_n)$
- $X_{(n)} = \max(X_1, \dots, X_n)$
- $\tilde{X} = \text{med}(X_1, \dots, X_n)$
- $\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$
- $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2$

Definição 2.7: Estimador

Se θ é um parâmetro de interesse e Θ é o espaço paramétrico que define todos os valores possíveis que θ pode assumir, então qualquer estatística que assuma valores dentro de Θ pode ser considerada um estimador para o parâmetro θ.

- Geralmente o estimador é denotado por uma letra grega com um chapéu (^) em cima, como em $\hat{\theta}$.
- A ideia por trás de um estimador é que ele fornece uma aproximação do valor verdadeiro do parâmetro com base nas observações da amostra.

Definição 2.7: Estimador

Exemplos:

- Se μ é a média de uma população, um estimador comum para μ é a média amostral $\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$.
- Se σ^2 é a variância de uma população, um estimador para σ^2 é a variância amostral $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \hat{\mu})^2$.

Definição 2.8

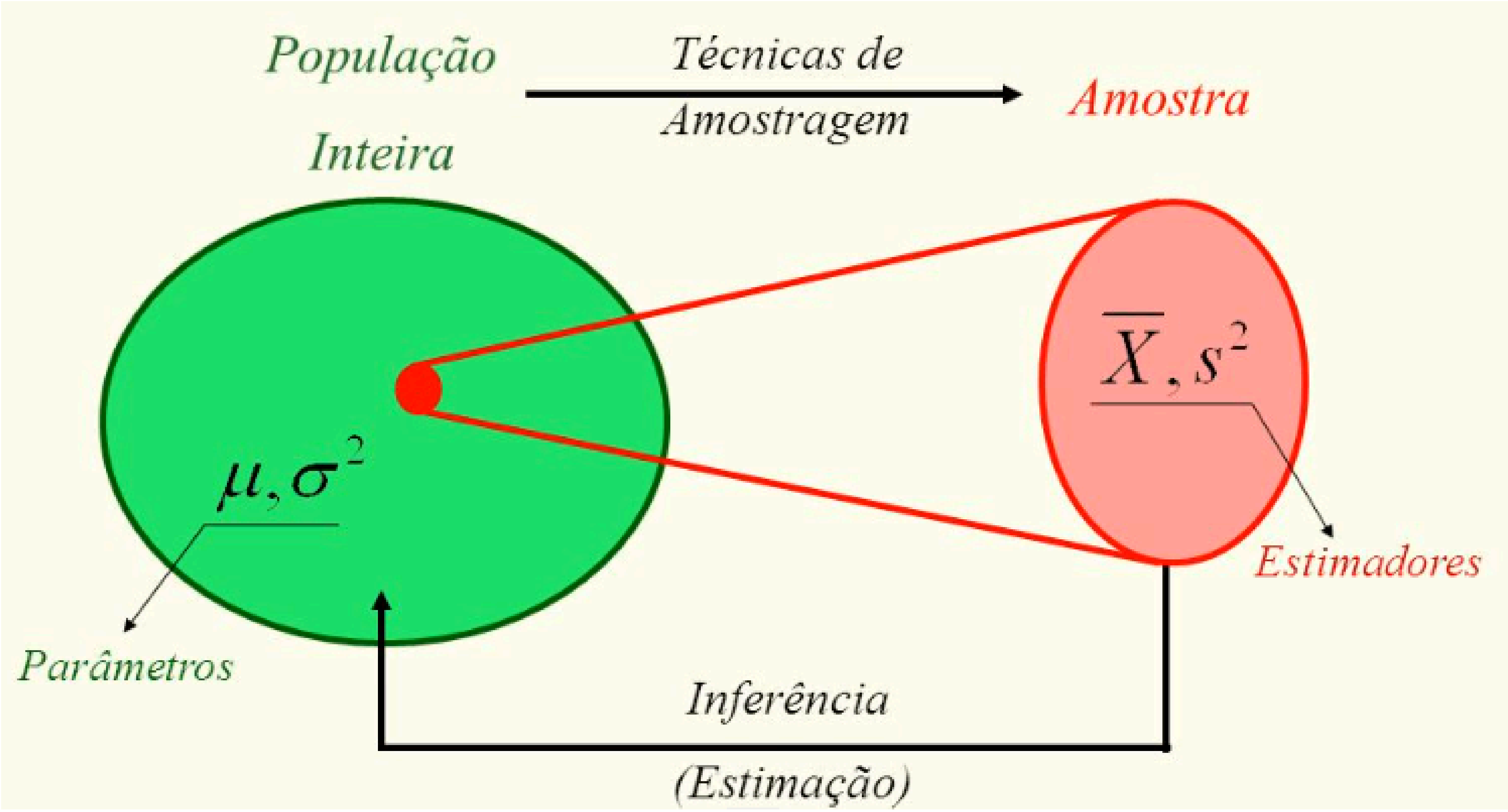
Qualquer estatística que assuma valores no conjunto dos possíveis valores de $g(\theta)$ é um estimador para $g(\theta)$.

Exemplo:

Considere que θ seja a média de uma população, e queremos estimar uma função dessa média, especificamente $g(\theta) = \theta^2$.

- Se $\hat{\theta}$ é o estimador da média θ, então o estimador para $g(\theta)$ é dado por

$$\hat{g}(\theta) = g(\hat{\theta}).$$



Fonte: https://slideplayer.com.br/slide/10934372/

Definição 2.9: Função de Verossimilhança

Uma amostra aleatória de tamanho n obtida de uma população X pode ser entendida como um conjunto de variáveis aleatórias, $X_1, \ldots, X_n$, independentes e identicamente distribuídas com a mesma distribuição de X.

- Se X tem uma distribuição com parâmetro θ, a função de densidade (ou função de probabilidade) conjunta de $X_1, \ldots, X_n$ é chamada de e é dada por

$$L(\theta; \underset{\sim}{x}) = f(x_1; \theta) f(x_2; \theta) \cdots f(x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \theta).$$

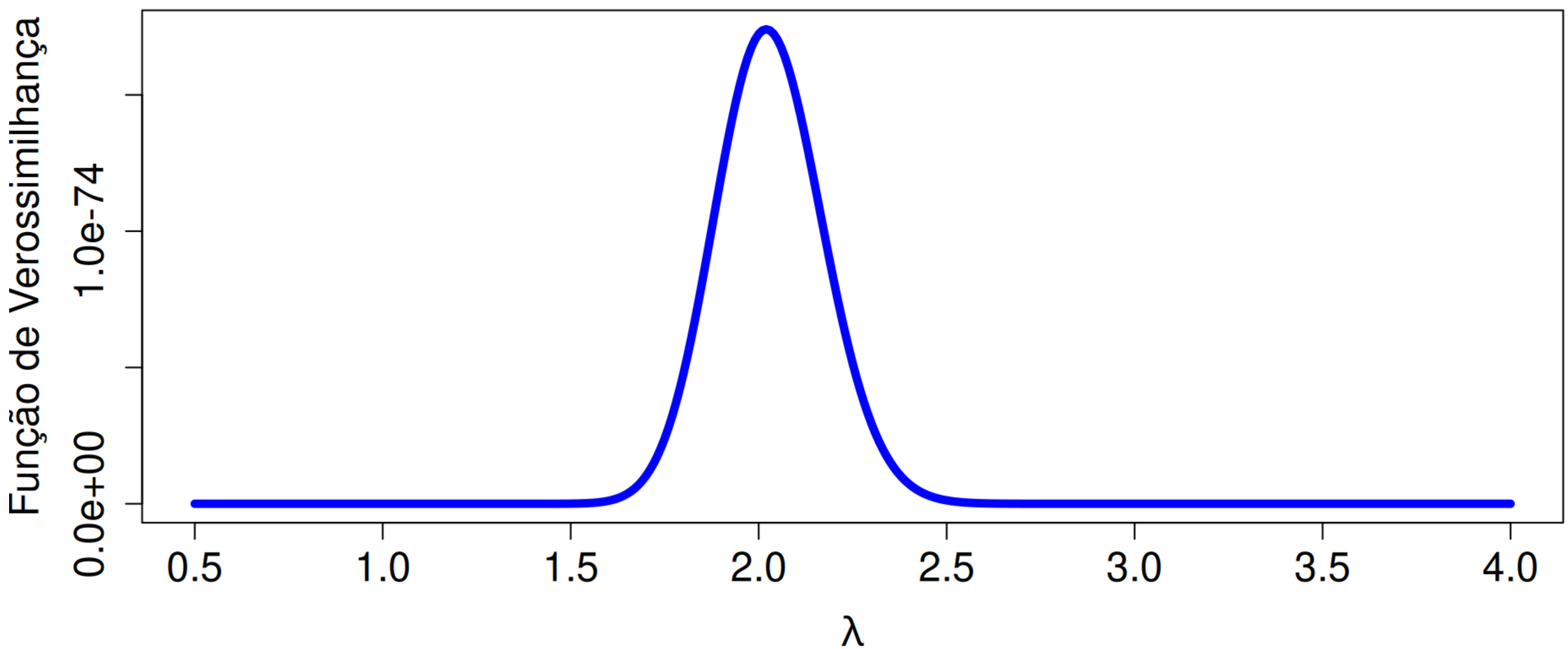
Exemplo 2.1

Suponha que estamos interessados no número de mortes por acidente de trânsito em um fim de semana comum, que pode ser modelado por uma variável aleatória X com distribuição de Poisson e parâmetro λ. A função de probabilidade da Poisson(λ) é

$$f(x; \lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}, \; x = 0, 1, 2, \ldots$$

Agora, considere que temos uma amostra aleatória de tamanho n, $X_1, \ldots, X_n$, obtida dessa distribuição de Poisson. Encontre a função de verossimilhança, $L(\lambda; \underset{\sim}{x})$, dessa amostra aleatória.

Exemplo 2.1


Função de Verossimilhança
0.0e+00
1.0e-74
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
3.5
4.0
λ

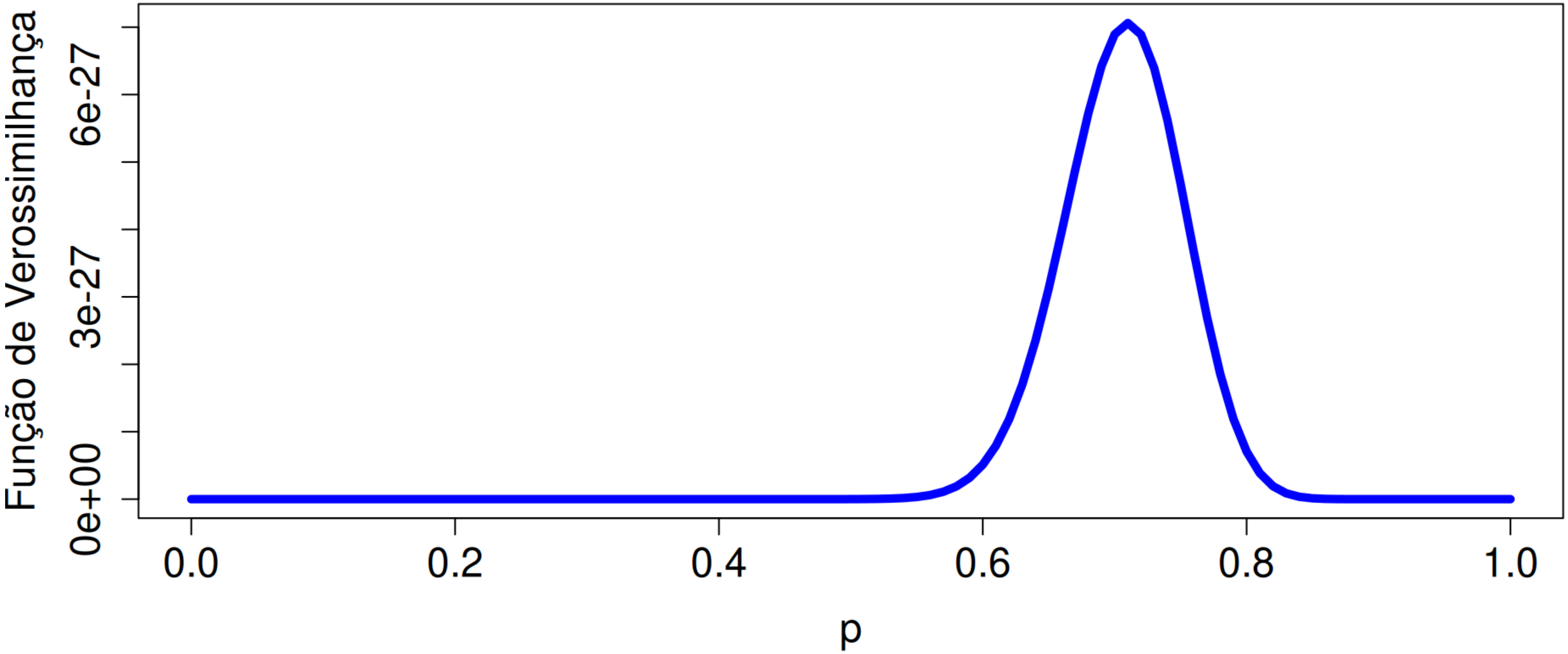
Exemplo 2.2

Imagine que uma empresa quer entender o cancelamento de assinaturas do seu serviço. A equipe de ciência de dados modela se um cliente cancela a assinatura como uma variável aleatória X com distribuição de Bernoulli de parâmetro p, onde p é a probabilidade de um cliente manter a assinatura. A função de probabilidade da Bernoulli(p) é:

$$f(x; p) = p^x (1-p)^{1-x}, \qquad x = 0, 1.$$

Aqui, $X = 1$ indica que o cliente manteve a assinatura, e $X = 0$ indica que o cliente cancelou. Considere uma amostra aleatória de tamanho n, $X_1, \ldots, X_n$, obtida dessa distribuição de Bernoulli. Determine a função de verossimilhança, $L(p; \underset{\sim}{x})$, dessa amostra aleatória.

Exemplo 2.2



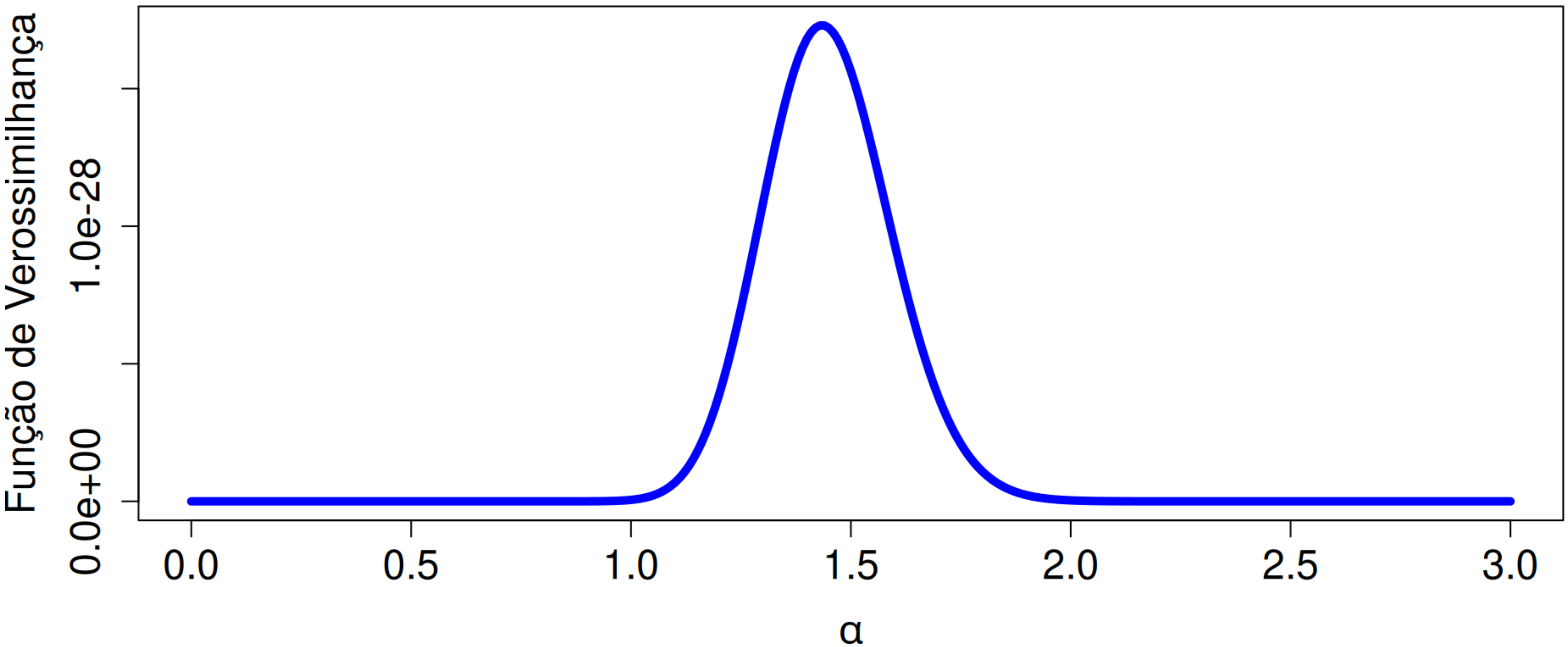
Exemplo 2.3

Pressuponha que o tempo de vida de um certo tipo de componente eletrônico, representado pela variável aleatória X, tem distribuição Exponencial com parâmetro α. A função de densidade da Exponencial(α) é:

$$f(x;\alpha) = \alpha e^{-\alpha x}, \qquad x \geq 0.$$

Admita que uma amostra aleatória de tamanho n, $X_1, \ldots, X_n$, foi obtida dessa distribuição Exponencial. Determine a função de verossimilhança, $L(p; \underset{\sim}{x})$, para essa amostra aleatória.

Exemplo 2.3



Fim