Viés de um Estimador

ESTAT0078 – Inferência I

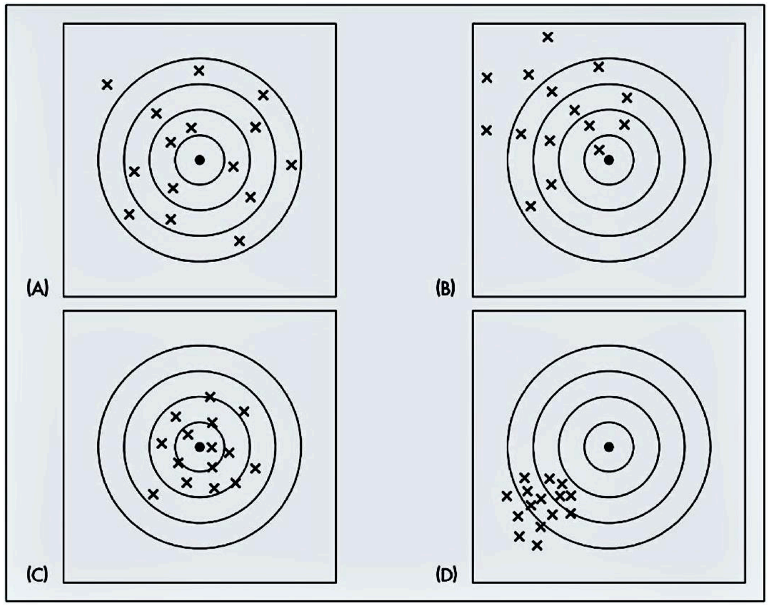
Prof. Dr. Sadraque E. F. Lucena

sadraquelucena@academico.ufs.br

http://sadraquelucena.github.io/inferencia1

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

- Em inferência estatística, desejamos, a partir de uma amostra, obter conclusões sobre a população.
- Mais especificamente, desejamos estimar um parâmetro θ que desconhecemos a partir de um estimador $\hat{\theta}$, que é uma função da amostra.
- Dada uma população, existem muitas e muitas amostras aleatórias simples (a.a.s) de tamanho n que podem ser sorteadas.
- Cada uma dessas amostras pode resultar em um valor diferente da estatística de interesse ($\overline{X}$ e S^2, por exemplo).
- Vejamos um exemplo.



Fonte: BUSSAB, Wilton de O.; MORETTIN, Pedro A. Estatística básica. Saraiva, 2010, capítulo 11.

- O alvo representa o valor do parâmetro e os “tiros” representam os diferentes valores amostrais da estatística de interesse.
- (A) e (C) fornecem valores distribuídos em torno do verdadeiro valor do parâmetro, embora em (A) os valores estejam mais dispersos.
- Em (B) e (D) as estimativas estão centradas em torno de um valor diferente do parâmetro de interesse e na parte (D), a dispersão é maior.

- O nosso interesse então é obter estimadores que forneçam estimativas centradas em torno do verdadeiro valor do parâmetro.
- Queremos também que a dispersão das estimativas seja a menor possível.
- Essas duas propriedades estão associadas à esperança e à variância do estimador, que são medidas de centro e dispersão, respectivamente.
- Vejamos o conceito de viés de um estimador.

Definição 3.1: Viés de um estimador

O viés (ou vício) de um estimador

$$B(\hat{\theta}) = E[\hat{\theta}] - \theta.$$

- Dizemos que um estimador $\hat{\theta}$ é para θ se

$$E[\hat{\theta}] = \theta$$

  para todo $\theta \in \Theta$.

- Note que se $\hat{\theta}$ é não viesado, $B(\hat{\theta}) = 0$.

Revisão: Esperança Matemática

- Se X é uma v.a. discreta e Y é uma v.a. contínua, a esperança é dada por

$$E(X) = \sum_i x_i P(X = x_i) \quad \text{e} \quad E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y f(y)\, dy.$$

Para variáveis aleatórias X e Y e constantes a e b:

- $E(a + bX) = a + bE(X)$
- $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
- Se X e Y forem independentes, $E(XY) = E(X)E(Y)$.

Essas propriedades valem para mais de duas variáveis aleatórias.

Revisão: Variância

$$Var(X) = E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

Para variáveis aleatórias X e Y e constantes a e b:

- $Var(bX) = b^2 Var(X)$
- Se X e Y são independentes,

  $$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$$

Essas propriedades valem para mais de duas variáveis aleatórias.

Exemplo 3.1

Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória independente e identicamente distribuída de uma população com $E(X) = \mu$ e $Var(X) = \sigma^2 > 0$.

a. $\overline{X}$ é viesado para μ?

b. $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2}{n}$ é viesado para σ^2?

c. $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2}{n-1}$ é viesado para σ^2?

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

Definição 3.2: Estimador Assintoticamente Não Viesado

Seja $\hat{\theta}$ um estimador de um parâmetro desconhecido θ. Diz-se que $\hat{\theta}$ é um estimador assintoticamente não viesado de θ se

$$\lim_{n\to\infty} E(\hat{\theta}) = \theta,$$

ou, de forma equivalente,

$$\lim_{n\to\infty} B(\hat{\theta}) = \lim_{n\to\infty} \left[E(\hat{\theta}) - \theta\right] = 0.$$

Exemplo 3.2

Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória independente e identicamente distribuída de uma população com $E(X) = \mu$ e $Var(X) = \sigma^2 > 0$.

a. $\overline{X}$ é assintoticamente não viesado para μ?

b. $\hat{\sigma}^2$ é assintoticamente viesado para σ^2?

c. S^2 é assintoticamente viesado para σ^2?

Fim