Critério da Fatoração de Neyman

ESTAT0078 – Inferência I

Prof. Dr. Sadraque E. F. Lucena

sadraquelucena@academico.ufs.br

http://sadraquelucena.github.io/inferencia1

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

Teorema 7.1: Critério da Fatoração de Neyman

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da distribuição da variável aleatória X com função de densidade (ou de probabilidade) $f(x)$ e função de verossimilhança $L(\theta; \underset{\sim}{x})$. Temos, então, que a estatística $T = T(X_1, \ldots, X_n)$ é suficiente para θ, se e somente se pudermos escrever

$$L(\theta; \underset{\sim}{x}) = h(x_1, \ldots, x_n) g_\theta(T(x_1, \ldots, x_n)),$$

em que

- $h(x_1, \ldots, x_n)$ só envolve $x_1, \ldots, x_n$ (não envolve θ);
- $g_\theta(T(x_1, \ldots, x_n))$ envolve θ e $T(x_1, \ldots, x_n)$.
- **Prova:** Livro do Bolfarine, pág. 22.

Exemplo 7.1

Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da distribuição de Poisson com parâmetro θ. Use o critério da fatoração para mostrar que $T(\underset{\sim}{x}) = \sum_{i=1}^{n} X_i$ é suficiente para θ.

Lembrete

$X \sim$ Poisson(θ): $f(x) = \frac{e^{-\theta}\theta^x}{x!}, x = 0, 1, 2, \ldots$

Exemplo 7.2

Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da variável $X \sim U(0, \theta)$. Encontre uma estatística suficiente para θ usando o critério da fatoração.

Lembrete

$X \sim U(a, b)$:

$$f(x) = \frac{1}{b-a} I_{(a,b)}(x) \quad \text{em que} \quad I_{(a,b)}(x) = \begin{cases} 1, & a < x < b, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Exemplo 7.3

Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da distribuição $N(\mu, 1)$. Encontre uma estatística suficiente para μ usando o critério da fatoração.

Lembrete

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)\colon f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty$$

Exemplo 7.4

Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da distribuição Bernoulli (θ). Encontre uma estatística suficiente para θ usando o critério da fatoração.

Lembrete

$X \sim \text{Bernoulli}(\theta)$: $f(x) = \theta^x (1-\theta)^{1-x},\ x = 0, 1$

Fim