Critério da Fatoração: Caso Multiparamétrico

ESTAT0078 – Inferência I

Prof. Dr. Sadraque E. F. Lucena

sadraquelucena@academico.ufs.br

http://sadraquelucena.github.io/inferencia1

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

Teorema 8.1: Critério da Fatoração de Neyman

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da distribuição da variável aleatória X com função de densidade (ou de probabilidade) $f(x)$. Temos, então, que a estatística $T = (T_1, \ldots, T_r)$ é conjuntamente suficiente para θ, se

$$L(\theta; \underset{\sim}{x}) = h(x_1, \ldots, x_n) g_\theta(T_1(\underset{\sim}{x}), \ldots, T_n(\underset{\sim}{x})),$$

em que

- $h(x_1, \ldots, x_n)$ só envolve $x_1, \ldots, x_n$ (não envolve θ);
- $g_\theta(T(x_1, \ldots, x_n))$ envolve θ e $T_1(\underset{\sim}{x}), \ldots, T_n(\underset{\sim}{x})$.

Exemplo 8.1

Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de tamanho n da variável aleatória $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Use o critério da fatoração para determinar duas estatísticas conjuntamente suficientes (μ, σ^2).

Lembrete

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)\text{: } f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty$$

Exemplo 8.2

Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da variável aleatória X com distribuição Gama(α, β). Encontre uma estatística conjuntamente suficiente para (α, β).

Lembrete

$X \sim$ Gama(α, β): $f(x) = \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)}, x > 0, \alpha, \beta > 0$

Definição 8.1

Dizemos que duas estatísticas T_1 e T_2 são equivalentes se existir uma relação 1:1 entre elas.

- Em outra palavras, T_1 e T_2 são equivalentes se T_1 puder ser obtida a partir de T_2 e vice-versa.
- Nesse caso, temos que, se T_1 é suficiente para θ, então T_2 também é suficiente para θ. Esse resultado vale também para o caso multidimensional.

Exemplo 8.3

Considerando o Exemplo 8.1, $\overline{X} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$ é suficiente para μ?

Fim