Estatística Completa e Estimador Não Viciado de Variância Uniformemente Mínima

ESTAT0078 – Inferência I

Prof. Dr. Sadraque E. F. Lucena

sadraquelucena@academico.ufs.br

http://sadraquelucena.github.io/inferencia1

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

- A definição de estatística completa junto com a definição de suficiência, possibilita a obtenção do estimador ótimo, isto é, o estimador não viciado de variância uniformemente mínima.

Definição 10.1: Estatística Completa

Uma estatística T é dita completa em relação à família $f(x)$ se, dada uma função $g(T)$,

$$E\left(g(T)\right) = 0 \quad \text{apenas se } g(T) = 0$$

com probabilidade 1.

Exemplo 10.1

Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória obtida de X com distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda > 0$, desconhecido.

Mostre que $T = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim$ Poisson$(n\lambda)$ é uma estatística completa em relação à Poisson.

Lembrete

$X \sim$ Poisson(θ): $P(X = x) = \frac{e^{-\theta}\theta^x}{x!}, x = 0, 1, 2, \ldots$

Exemplo 10.2

Seja X_1, X_2 uma amostra aleatória da variável $X \sim$ Bernoulli(p). Verifique que $T = X_1 - X_2$ não é uma estatística completa.

Lembrete

$X \sim$ Bernoulli(p): $P(X = x) = p^x(1-p)^{1-x}, x = 0, 1$

Exemplo 10.3

Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória obtida de X com distribuição de Bernoulli com parâmetro p, $0 < p < 1$. Mostre que $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$ é uma estatística completa.

Lembretes

1. $X \sim$ Bernoulli(p): $P(X = x) = p^x(1-p)^{1-x}, x = 0, 1$
2. $T \sim$ Binomial(n, p): $P(T = t) = \binom{n}{t} p^t (1-p)^{n-t}, x = 0, 1, 2, \ldots, n$

Teorema 10.1

Suponha que X tenha distribuição pertencente à família exponencial, ou seja, podemos escrever

$$f(x) = \exp\{c(\theta)T(x) + d(\theta) + S(x)\},$$

então $T(x)$ é suficiente para θ.

- $T(x)$ também será completa se o domínio de $c(\theta)$ contiver um intervalo da reta.

Teorema 10.2: Teorema de Lehmann-Scheffé

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de X com f.d.p. (ou f.p.) $f(x)$. Seja T uma estatística suficiente e completa. Seja S um estimador não viciado de θ. Então $\hat{\theta} = E(S|T)$ é o para θ.

- Prova no livro do Bolfarine, pág. 31.

Exemplo 10.4

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da distribuição de Poisson com parâmetro θ. Verifique que $\overline{X}$ é o ENVVUM para θ.

Lembrete

$X \sim$ Poisson(θ): $P(X = x) = \frac{e^{-\theta}\theta^x}{x!}, x = 0, 1, 2, \ldots$

Fim