O Método dos Momentos

ESTAT0078 – Inferência I

Prof. Dr. Sadraque E. F. Lucena

sadraquelucena@academico.ufs.br

http://sadraquelucena.github.io/inferencia1

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

- Anteriormente consideramos um critério para verificar se determinado estimador é ou não eficiente.
- Contudo, tal procedimento não é um método que possibilita, em geral, a obtenção de estimadores em situações específicas.
- Agora vamos considerar alguns métodos que possibilitam a obtenção de estimadores em situações específicas.
- Veremos o Método dos Momentos e o Método da Máxima Verossimilhança.

Método dos Momentos

- Seja $X_1, \dots, X_n$ uma amostra aleatória de X com distribuição de probabilidade com k parâmetros desconhecidos a serem estimados $(\theta_1, \dots, \theta_k)$.
- O método dos momentos para obter os estimadores $\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_k$ de $\theta_1, \dots, \theta_k$, respectivamente, consiste em igualar os momentos teóricos populacionais aos correspondentes momentos amostrais e solucionar as equações para os parâmetros envolvidos.

Definição 11.1: Momentos Populacionais

Chama-se momento (populacional) de ordem k ($k \geq 1$ inteiro positivo) da variável aleatória X em relação a 0, a esperança matemática de X^k, ou seja,

$$\mu'_k = E(X^k) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \, f(x) \, dx, & \text{no caso contínuo,} \\ \sum_i x_i^k \, P(X = x_i), & \text{no caso discreto.} \end{cases}$$

- Em particular, se $k = 1$, temos o valor esperado de X, $\mu = E(X)$.

Definição 11.2: Momento Centrado

O momento (populacional) de ordem k em relação à média da variável aleatória X (momento centrado na média) é definido por

$$\mu_k = E\left[(X-\mu)^k\right] = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^k\ f(x)\,dx, & \text{no caso contí} \\ \sum_i (x_i-\mu)^k\ P(X=x_i), & \text{no caso discr} \end{cases}$$

- Em particular, se $k=2$, temos a variância da variável aleatória X, $\mu = E(X)$.

Definição 11.3: Momentos Amostrais

Chama-se momento amostral de ordem k ($k \geq 1$ inteiro positivo) em relação a 0 a estatística

$$M_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k.$$

- O primeiro momento amostral ($k = 1$) em relação à origem é a média amostral, $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

Definição 11.4: Momento Amostral Centrado

O momento amostral de ordem k em relação à média (centrado na média) $\overline{x}$ é definido por

$$M_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^k.$$

- O segundo momento amostral ($k = 2$) em relação à média costuma ser representado por $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$.

- De acordo com o método dos momentos, os estimadores $\hat{\theta}_1, \ldots, \hat{\theta}_k$ de $\theta_1, \ldots, \theta_k$, dos parâmetros $\theta_1, \ldots, \theta_k$ são obtidos igualando os momentos populacionais aos correspondentes momentos amostrais baseados em uma amostra aleatória $X_1, \ldots, X_n$.
- Ou seja, consideramos os momentos ordinários (centrados na origem) e resolvemos o sistema de equações

$$E(X^r) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^r, \qquad r = 1, 2 \ldots, k,$$

em que $E(X^r)$ são fórmulas envolvendo os parâmetros a serem estimados.

- A utilização do método dos momentos depende da existência de solução única para a equação acima e da existência dos momentos teóricos.

Exemplo 11.1

Obtenha através do método dos momentos e, a partir de uma amostra aleatória de tamanho n $(X_1, \ldots, X_n)$ os estimadores para os parâmetros:

a. p, de uma distribuição de Bernoulli;

b. λ, de uma distribuição Poisson;

c. p, de uma distribuição Binomial com n conhecido.

Exemplo 11.2

Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de $X \sim$ Exponencial com valor esperado $1/\alpha$. Obtenha através do método dos momentos o estimador para o parâmetro α.

Fim