O Método dos Momentos (Caso Multiparamétrico)

ESTAT0078 – Inferência I

Prof. Dr. Sadraque E. F. Lucena

sadraquelucena@academico.ufs.br

http://sadraquelucena.github.io/inferencia1

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

Caso Multiparamétrico

Como fazer:

1. Igualamos os k primeiros momentos populacionais aos amostrais.
2. Resolvemos o sistema para isolar os parâmetros.

$$
\begin{cases}
\mu_1'(\theta_1, \ldots, \theta_k) = \overline{X} \\
\mu_2'(\theta_1, \ldots, \theta_k) = \frac{1}{n} \sum X_i^2 \\
\vdots
\end{cases}
$$

Caso Multiparamétrico

- Em algumas situações é mais fácil usar $Var(X)$ no lugar de $E(X^2)$. Nessa situação, igualamos a variância populacional ao segundo momento amostral centrado na média. No caso de dois parâmetros resolvemos o sistema

$$\begin{cases} E(X) = \overline{X} \\ Var(X) = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{n}. \end{cases}$$

Exemplo 12.1

Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.
Obtenha os estimadores de momentos para μ e σ^2.

Análise Crítica: O Viés na Variância

Atenção!

Compare o estimador obtido com a variância amostral S^2:

$$\hat{\sigma}^2_{MM} = \frac{\sum(X_i - \overline{X})^2}{n} \quad \text{vs} \quad S^2 = \frac{\sum(X_i - \overline{X})^2}{n-1}$$

- O estimador de momentos divide por n, não por $n-1$.
- **Consequência:** $E[\hat{\sigma}^2_{MM}] = \frac{n-1}{n}\sigma^2$.
- O estimador é **VIESADO** (subestima a variância verdadeira), mas é consistente (pois $\frac{n-1}{n} \to 1$).

Exemplo 12.2

Um atuário analisando uma carteira de seguro de automóveis recém-adquirida pela sua seguradora precisa estimar o Risco (variabilidade) e o Retorno Esperado (média) dessa carteira para precificar a renovação dos contratos. A variável de interesse X é a Sinistralidade Mensal (Sinistros Pagos / Prêmios Arrecadados), expressa em %. Supomos que, devido ao Teorema Central do Limite (muitas apólices independentes), $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Os Dados (Amostra de $n = 6$ meses) foram:

$$\mathbf{x} = \{55, 60, 45, 70, 50, 80\}$$

Qual o retorno médio ($\widehat{\mu}$) e o risco ($\hat{\sigma}^2$) estimados pelo método dos momentos?

Exemplo 12.3

Seja $X \sim$ Uniforme(a, b). Obtenha os estimadores de momentos de a e b.

Dica

$X \sim$ Uniforme(a, b): $E(X) = (a + b)/2$ e $Var(X) = (a + b)^2/12$

Exemplo 12.4

Seja $X \sim$ Binomial(m, p), onde ambos são desconhecidos.

(Exemplo: Estimar o número total de pessoas expostas ao risco m e a probabilidade de sinistro p apenas observando o número de sinistros).

Limitação

Para que $\hat{p}$ e $\widehat{m}$ façam sentido, precisamos que $\overline{X} > S^2$ (subdispersão). Caso contrário, teremos probabilidades negativas ou m negativo!

Conclusão sobre o Método dos Momentos

- **Vantagens:**
  - Intuitivo e fácil de aplicar.
  - Ótimo “ponto de partida” (chute inicial) para métodos iterativos.
- **Desvantagens:**
  - Geralmente não é eficiente (maior variância).
  - Pode gerar estimativas fora do espaço paramétrico (como visto na Binomial ou Pareto).
  - Viesado em pequenas amostras.

Próximo Passo

- O Método de Máxima Verossimilhança (MV), que resolve a maioria desses problemas de eficiência.

Fim