Método de Máxima Verossimilhança – Caso Multiparamétrico

ESTAT0078 – Inferência I

Prof. Dr. Sadraque E. F. Lucena

sadraquelucena@academico.ufs.br

http://sadraquelucena.github.io/inferencia1

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

Contextualização

- Até agora, maximizamos funções de uma única variável ($L(\theta)$).
- A maioria dos modelos reais possui vetores de parâmetros:
  - Normal: $\boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma^2)$
  - Gama: $\boldsymbol{\theta} = (\alpha, \beta)$
  - Regressão Linear: $\boldsymbol{\theta} = (\beta_0, \beta_1, \sigma^2)$

Desafio:

- Não buscamos mais o topo de uma curva 2D, mas o **pico de uma superfície** (montanha) em múltiplas dimensões.

MV: Caso Multiparamétrico

- Seja $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_r)$ um vetor de parâmetros. A função de verossimilhança é:

$$L(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \theta_1, \ldots, \theta_r)$$

MV: Caso Multiparamétrico

- Para maximizar, precisamos anular o **Vetor Gradiente** (ou Vetor Score) da log-verossimilhança $\ell(\boldsymbol{\theta})$:

$$\nabla \ell(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \ell}{\partial \theta_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \ell}{\partial \theta_r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Isso gera um **sistema de equações** para resolver.

Exemplo 15.1:

Seja $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Temos dois parâmetros desconhecidos: $\theta_1 = \mu$ e $\theta_2 = \sigma^2$. A densidade é

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2 \right\}.$$

Determine os estimadores de máxima verossimilhança de μ e σ^2.

Análise Crítica: O Viés na Normal

Ponto de Atenção!

O Estimador de Máxima Verossimilhança da variância divide a soma dos quadrados por n. A Variância Amostral (S^2) divide por $n-1$.

Consequências:

1. **Viés:** O estimador MV é **viesado**. Ele subestima a variância verdadeira em pequenas amostras ($E[\hat{\sigma}^2] = \frac{n-1}{n}\sigma^2$).
2. **Consistência:** Quando $n \to \infty$, a diferença entre dividir por n ou $n-1$ desaparece. Logo, ele é **consistente**.
3. **EQM:** Curiosamente, o estimador MV tem menor Erro Quadrático Médio que o S^2, apesar do viés.

Resumo Comparativo Final

Critério	Método dos Momentos	Máxima Verossimilhança
Intuição	Amostra reflete População	Dados mais prováveis
Cálculo	Sistemas Algébricos	Derivadas / Numérico
Viés	Possível	Possível (Ex: Normal)
Eficiência	Baixa (Geralmente)	**Alta** (Assintotica-mente Eficiente)
Invariância	Não	**Sim** (Ponto forte do MV)

Fim