

O Método dos Momentos

Como construir um estimador?

ESTAT0078 – Inferência I

Prof. Dr. Sadraque E. F. Lucena

<http://sadraquelucena.github.io/inferencia1>

Estimação de Parâmetros

- Considere duas situações:
 - Um atuário precisa modelar o **valor dos sinistros de uma seguradora** e decide ajustar uma distribuição **Gama** ou **Pareto**.
 - Um estatístico precisa modelar o **número de pacientes que chegam ao pronto-socorro por hora** por meio de uma distribuição **Poisson**.
- Em ambos os problemas, **conhecemos o modelo probabilístico, mas desconhecemos seus parâmetros**.
- Como podemos usar os dados observados para estimar esses parâmetros?
 - Para isso podemos usar o **Método dos Momentos**.

A Ideia do Método dos Momentos

- Como a população é desconhecida, obtemos uma amostra.
- A ideia do Método dos Momentos é substituir os momentos populacionais desconhecidos pelos correspondentes momentos amostrais observados.
- Se a média da população é $\mu(\theta)$ (uma equação que envolve θ) e a média da amostra é $\bar{X}$, forçamos a igualdade:

$$\mu(\theta) = \bar{X}$$

e resolvemos a equação para encontrar θ .

Definição 2.1: Momentos Populacionais

- Os momentos populacionais descrevem a “forma” teórica da distribuição. Eles são **constantes** que dependem dos parâmetros desconhecidos.
- O k -ésimo momento populacional (ao redor da origem) de uma v.a. X é:

$$\mu'_k(\theta) = E[X^k] = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x|\theta) dx & (\text{Contínuo}) \\ \sum_x x^k P(X = x|\theta) & (\text{Discreto}) \end{cases}$$

Casos Clássicos:

- $k = 1 \implies \mu'_1 = E[X]$ (Média)
- $k = 2 \implies \mu'_2 = E[X^2]$ (Segundo momento, usado para variância)

Definição 2.2: Momentos Amostrais

- Os momentos amostrais são **variáveis aleatórias** calculadas a partir dos dados observados $X_1, \dots, X_n$. Eles não dependem de θ .
- O k -ésimo momento amostral é:

$$M'_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k$$

- Note que o primeiro momento amostral é $M'_1 = \overline{X}$.
- Pela Lei dos Grandes Números, sabemos que quando $n \rightarrow \infty$:

$$M'_k \xrightarrow{P} E(X^k).$$

O Método dos Momentos

Considere um modelo com k parâmetros desconhecidos $\theta_1, \dots, \theta_k$.

Passo 1: Calcule os k primeiros momentos teóricos:

$$E[X], E[X^2], \dots, E[X^k]$$

Passo 2: Calcule os k primeiros momentos amostrais:

$$M'_1 = \bar{X}, \quad M'_2 = \frac{1}{n} \sum X_i^2, \dots, M'_k = \frac{1}{n} \sum X_i^k$$

O Método dos Momentos

Passo 3: Monte o sistema de equações igualando População = Amostra:

$$\begin{cases} E[X] = M'_1 \\ E[X^2] = M'_2 \\ \vdots \\ E[X^k] = M'_k \end{cases}$$

Passo 4: Resolva o sistema para $\theta_1, \dots, \theta_k$. As soluções são os estimadores $\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_k$.

Exemplo 2.1

Considere uma amostra aleatória $X_1, \dots, X_n$ de uma população tal que

$$X_i \sim \text{Bernoulli}(p), \quad i = 1, \dots, n,$$

em que p é desconhecido.

- a) Utilizando o Método dos Momentos, obtenha um estimador para p .
- b) Se, em uma amostra de $n = 20$ indivíduos, foram observados 14 sucessos, qual é a estimativa de p pelo método dos momentos?

Se $X \sim \text{Bernoulli}(p)$:

- $P(X = x \mid p) = p^x (1 - p)^{1-x}, x \in \{0, 1\}$
- $E(X) = p$
- $\text{Var}(X) = p(1 - p)$

Exemplo 2.2

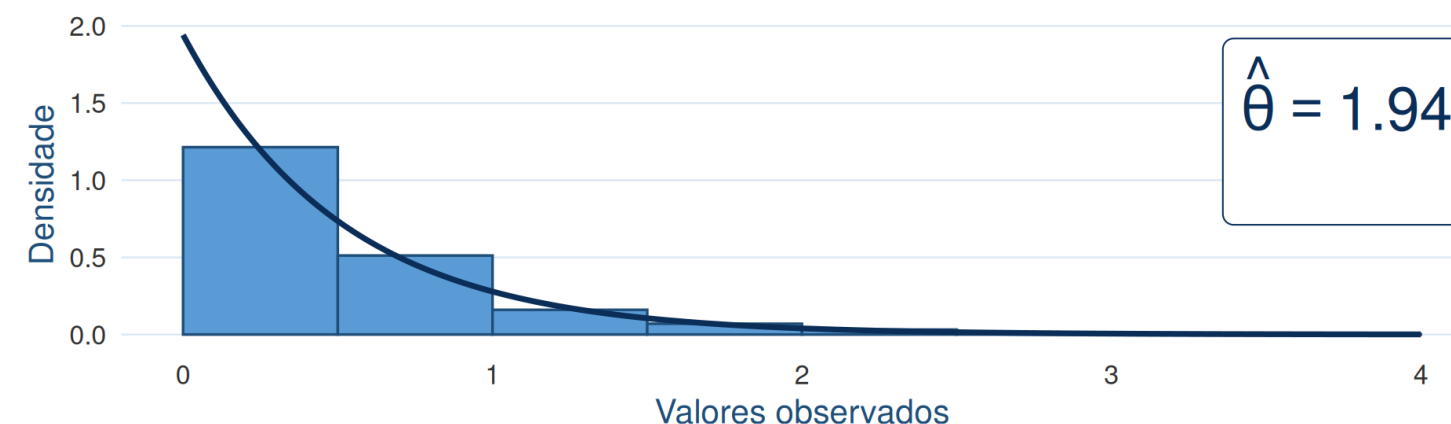
Considere uma amostra aleatória $X_1, \dots, X_n$ de uma população com distribuição Exponencial tal que

$$f(x | \theta) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, \quad x > 0, \theta > 0.$$

- Obtenha um estimador para θ pelo Método dos Momentos.
- Se, em uma amostra de $n = 100$ observações, foi obtida uma média amostral de $\bar{X} = 0,5155$, qual é a estimativa de θ ?

Nesse caso:

- $E(X) = \theta$
- $Var(X) = \theta^2$



Exemplo 2.3

Considere uma amostra aleatória $X_1, \dots, X_n$ de uma população tal que

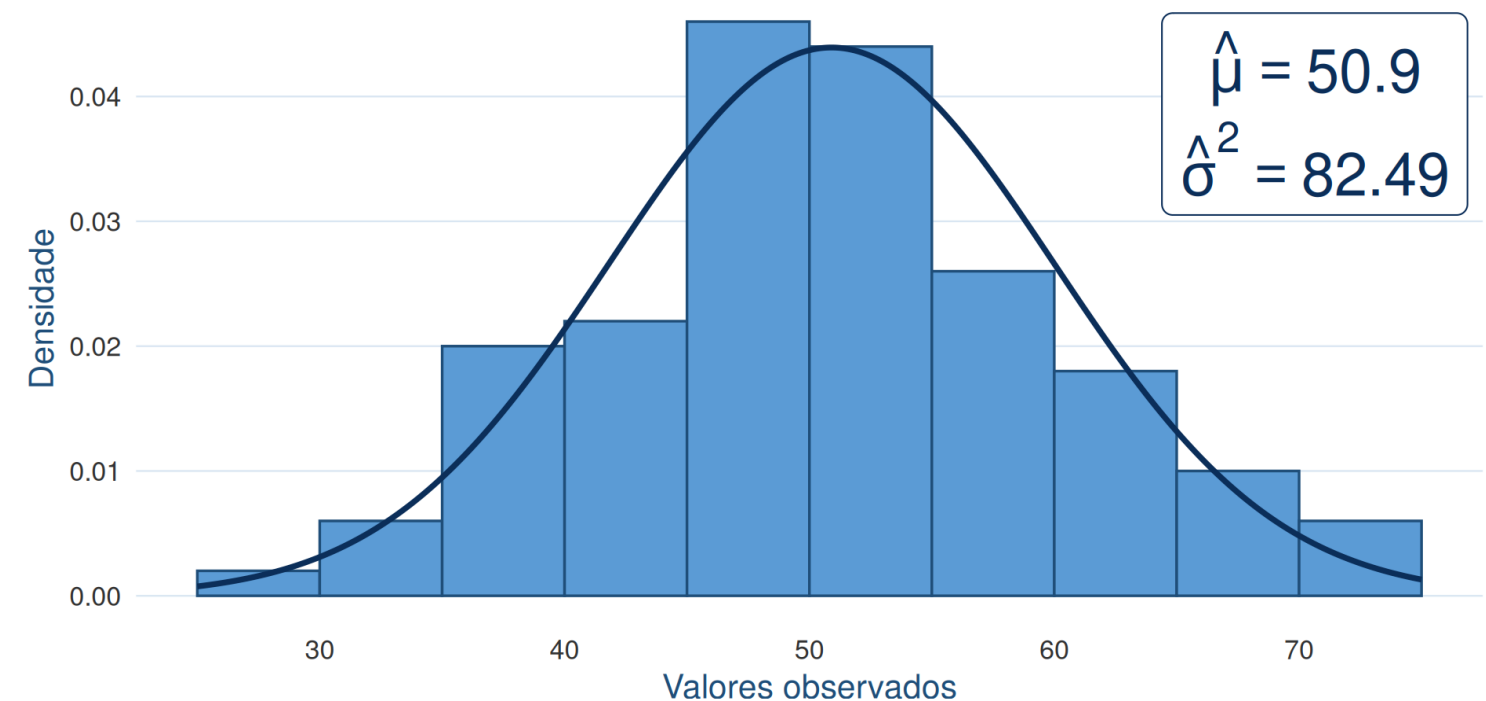
$$X_i \sim N(\mu, \sigma^2), \quad i = 1, \dots, n,$$

em que μ e σ^2 são desconhecidos. Utilizando o Método dos Momentos, obtenha os estimadores de μ e σ^2 .

- Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$:

$$f(x \mid \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

para $-\infty < x < \infty$.



Quando o 1º Momento Falha

- Se um momento falhar, podemos tentar usar outro.

Exemplo 2.4

Considere $X \sim \text{Uniforme}(-\theta, \theta)$. Obtenha o estimador pelo método dos momentos.

- Temos apenas um parâmetro (θ). O primeiro momento é

$$E[X] = \frac{-\theta + \theta}{2} = 0$$

- Igualar $0 = \overline{X}$ não nos ajuda a encontrar θ .

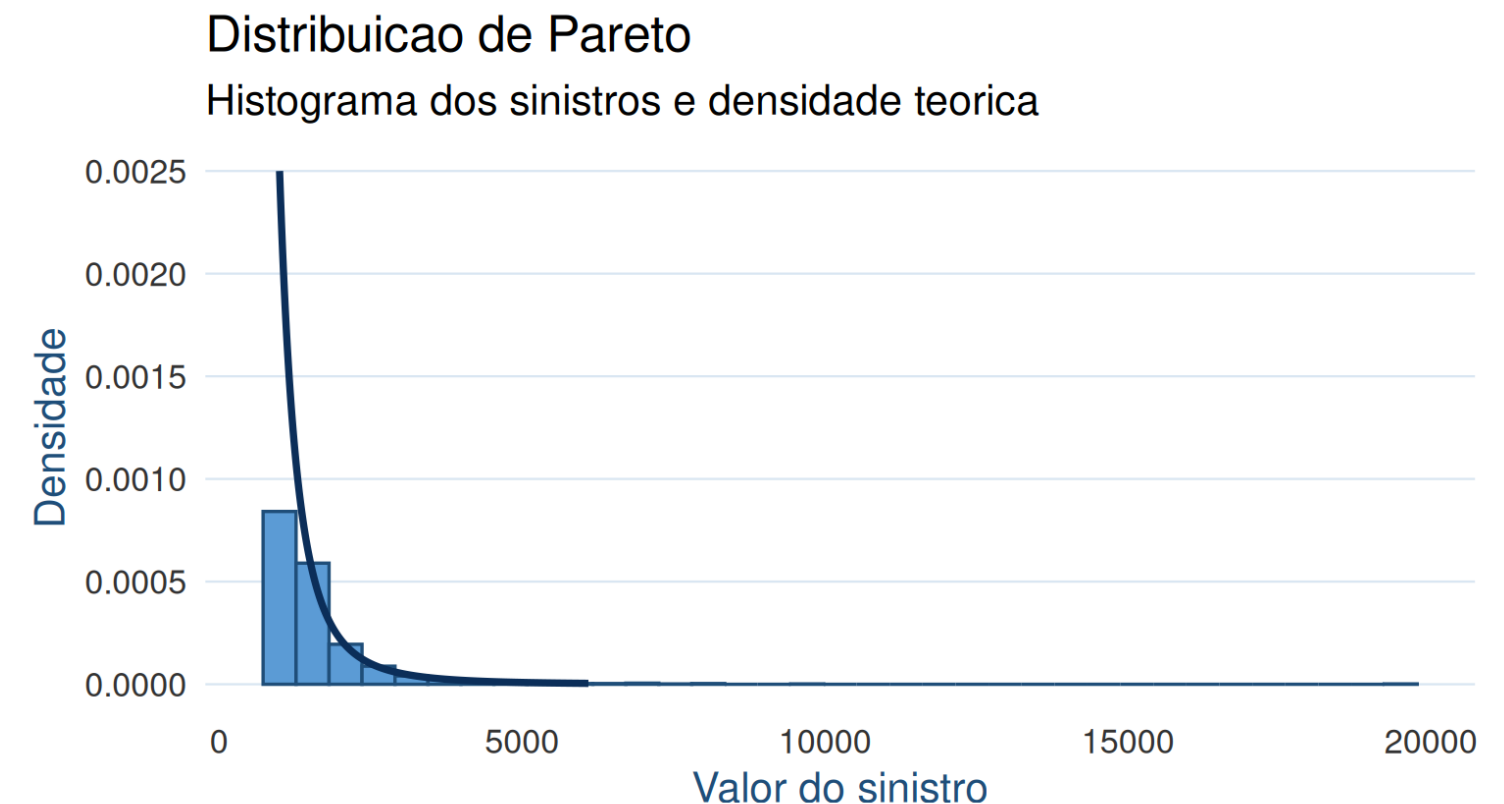
Solução: Vamos usar o próximo momento, $E[X^2]$.

Exemplo 2.5

O valor dos sinistros de uma carteira de seguros segue uma distribuição de Pareto com parâmetro de forma $\alpha > 1$ e parâmetro de escala (sinistro mínimo) conhecido $x_m = 1000$. A densidade é $f(x) = \frac{\alpha x_m^\alpha}{x^{\alpha+1}}$ para $x \geq x_m$. Estime α pelo método dos momentos.

Se $X \sim \text{Pareto}(\alpha, x_m)$:

- $E(X) = \alpha x_m / (\alpha - 1)$.



Propriedades Importantes

1. **Consistência:** À medida que a amostra aumenta ($n \rightarrow \infty$), a probabilidade do estimador obtido pelo método dos momentos se afastar do verdadeiro parâmetro vai a zero.
 - Pela Lei dos Grandes Números, os momentos amostrais convergem para os populacionais, $\hat{\theta} \xrightarrow{P} \theta$.
2. **Viés:** Frequentemente os estimadores obtidos pelo método dos momentos **são viesados**.
 - Frequentemente $E(\hat{\theta}_{MM}) \neq \theta$.
3. **Eficiência:** Geralmente os estimadores obtidos pelo método dos momentos têm variância maior que os estimadores de Máxima Verossimilhança. Ou seja, em geral não são eficientes.

Propriedades Importantes

4. **Suficiência:** O Método dos Momentos nem sempre gera estimadores suficientes.

- Isto é: O estimador pode “desperdiçar” informação. Nesses casos, ele não resume tudo o que a amostra tem a dizer sobre o parâmetro; houve perda de informação no processo.

5. **Custo Computacional:** Por produzir equações geralmente simples, o custo computacional do método é baixo.

- É um ótimo valor inicial para algoritmos numéricos.

6. **Existencia:** Se os momentos não existirem, não é possível obter um estimador por esse método.

Fim