

Propriedades dos Estimadores de Máxima Verossimilhança

Como estimar vários parâmetros simultaneamente?

ESTAT0078 – Inferência I

Prof. Dr. Sadraque E. F. Lucena

<http://sadraquelucena.github.io/inferencia1>

Introdução

Por que o Método de Máxima Verossimilhança (MV) é considerado o método padrão na inferência estatística moderna?

Diferente do Método dos Momentos, o MV possui propriedades teóricas ótimas para **grandes amostras**:

1. **Invariância:** Facilidade para estimar funções do parâmetro.
2. **Eficiência:** Garante a menor variância possível (assintoticamente).
3. **Normalidade:** Permite a construção fácil de intervalos de confiança.

Teorema 5.1: Princípio da Invariância

- Este teorema resolve um problema prático: muitas vezes não queremos estimar θ , mas uma função dele.
- Seja $\hat{\theta}$ o estimador de máxima verossimilhança de θ . Se $g(\theta)$ é uma função bijetora (ou, sob certas condições, qualquer transformação), então o estimador de máxima verossimilhança de $g(\theta)$ é dado por:

$$\widehat{g(\theta)} = g(\hat{\theta}).$$

- *Diferença Crucial:* O Método dos Momentos **não** garante isso (ex: $E[\overline{X}^2] \neq \mu^2$). Já o Método da Máxima Verossimilhança garante.

Exemplo 5.1

Seja $X \sim \text{Bernoulli}(p)$. O EMV é $\hat{p} = \bar{X}$. Qual o EMV da variância populacional $g(p) = p(1 - p)$?

Exemplo 5.2

Seja $X \sim \text{Exp}(\theta)$ com média θ . A densidade é $f(x) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}$. O EMV é $\hat{\theta} = \overline{X}$. Um atuário precisa estimar a probabilidade de um sinistro ocorrer após o tempo $t = 1$:

$$S(1) = P(X > 1) = \int_1^{\infty} \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta} dx = e^{-1/\theta}$$

Qual o EMV de $S(1)$?

Distribuição em Grandes Amostras

- Sob condições de regularidade, o EMV tem comportamento **Assintoticamente Normal**.
- Quando $n \rightarrow \infty$:

$$\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow{d} N\left(0, \frac{1}{I_1(\theta)}\right)$$

- Ou, em termos de aproximação para amostras finitas:

$$\hat{\theta} \approx N\left(\theta, \frac{1}{nI_1(\theta)}\right)$$

- $I_1(\theta) = -E\left[\frac{\partial^2 \log f(X;\theta)}{\partial \theta^2}\right]$ é chamada de **Informação de Fisher Esperada (unitária)**.

Como obter a Informação de Fiser Esperada (unitária)

A informação de Fisher esperada, para uma observação, é definida por

$$I_1(\theta) = -E \left[\frac{\partial^2 \log f(X; \theta)}{\partial \theta^2} \right]$$

Para obtê-la:

1. Obtenha a log-verossimilhança unitária: $\ell(\theta; x) = \log f(x; \theta)$
2. Calcule a segunda derivada em relação a θ : $\frac{\partial^2 \ell(\theta; x)}{\partial \theta^2}$
3. Calcule a esperança dessa segunda derivada: $E \left[\frac{\partial^2 \ell(\theta; X)}{\partial \theta^2} \right]$
4. Tome o negativo dessa esperança: $I_1(\theta) = -E_\theta \left[\frac{\partial^2 \ell(\theta; X)}{\partial \theta^2} \right]$

Distribuição em Grandes Amostras

- A variância $\frac{1}{nI_1(\theta)}$ é chamado **Limite Inferior de Cramér-Rao**.
- Isso significa que o EMV é o estimador com menor variância possível, ou seja, é o mais preciso possível (entre os não-viesados) para grandes amostras.

Exemplo 5.4

Seja $X \sim \text{Bernoulli}(p)$. EMV $\hat{p} = \overline{X}$. Determine a distribuição assintótica do EMV de p .

Exemplo 5.5

Seja $X \sim \text{Poisson}(\theta)$. EMV $\hat{\theta} = \overline{X}$. Determine a distribuição assintótica do EMV de θ .

O Método Delta

- Como obter a distribuição assintótica de uma função $g(\hat{\theta})$?
- Usamos a expansão de Taylor de primeira ordem, técnica conhecida como **Método Delta**.
- Se $\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \rightarrow N(0, \sigma^2)$, então:

$$\sqrt{n}(g(\hat{\theta}) - g(\theta)) \xrightarrow{d} N(0, [g'(\theta)]^2 \cdot \sigma^2)$$

- Aplicando ao caso de MV:

$$g(\hat{\theta}) \approx N\left(g(\theta), \frac{[g'(\theta)]^2}{nI_1(\theta)}\right)$$

Exemplo 5.6

Seja $X \sim \text{Bernoulli}(p)$. EMV $\hat{p} = \overline{X}$. Determine a distribuição assintótica do EMV de $p(1 - p)$.

Exemplo 5.7

Seja $X \sim \text{Poisson}(\theta)$. EMV $\hat{\theta} = \overline{X}$. Determine a distribuição assintótica do EMV de $g(\theta) = P(X = 0) = e^{-\theta}$ (Probabilidade de zero ocorrências).

Fim