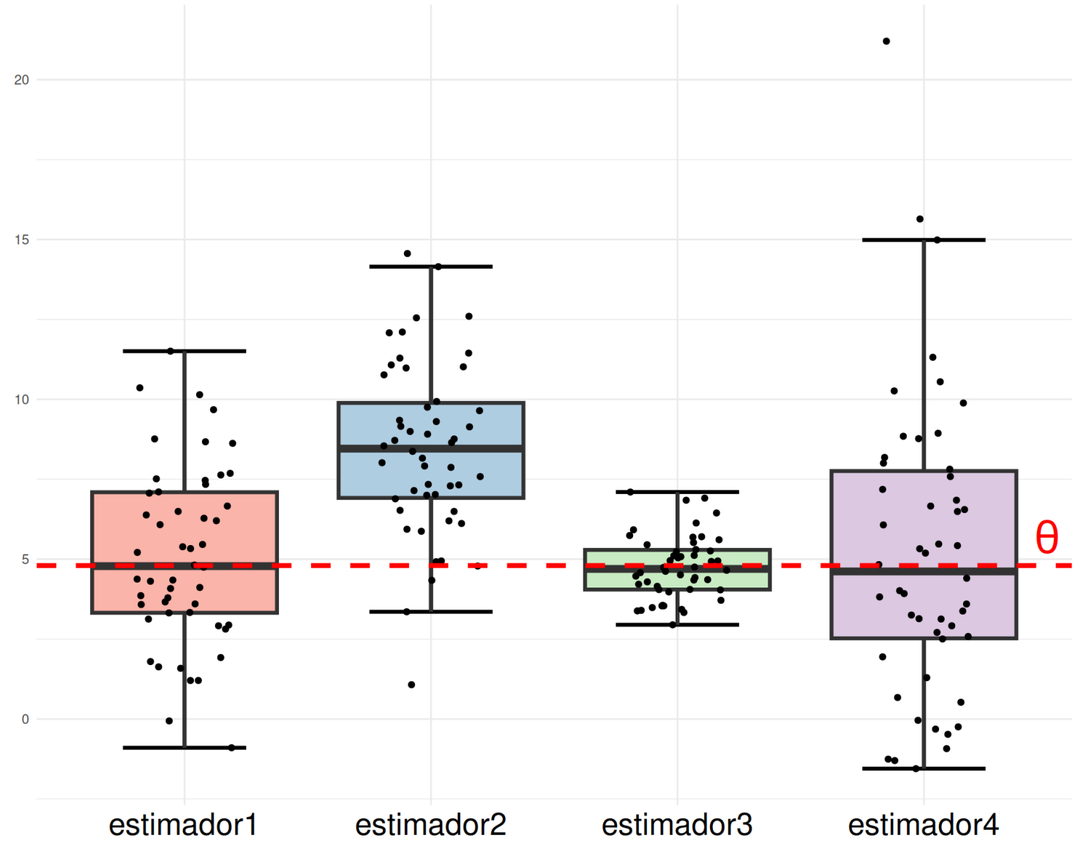
Eficiência de um Estimador

Quão bom um estimador pode ser?

ESTAT0078 – Inferência I
Prof. Dr. Sadraque E. F. Lucena
http://sadraquelucena.github.io/inferencia1

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

- Suponha que obtivemos várias amostras e calculamos, para cada uma delas, as estimativas de θ fornecidas por quatro estimadores.



- O estimador 2 deve ser descartado por ter viés.
- Entre os estimadores não viesados, o estimador 3 é preferível por apresentar menor variância (maior precisão).
- Mas será que existe algum estimador não viesado que tenha variância menor que o estimador 3?
- Ou seja, existe um **limite inferior** para a variância dos estimadores não viesados de θ?

Qual é a menor variância possível?

- Se $\hat{\theta}$ é um estimador não viesado de θ, podemos determinar um **limite inferior** para sua variância.
- É possível mostrar que **nenhum estimador não viesado de θ tem variância inferior a um limite** $LI(\theta)$. Matematicamente:

$$Var(\hat{\theta}) \geq LI(\theta).$$

- Esse limite é chamado de **Limite inferior de Cramér-Rao**.

Definição 8.1: Limite Inferior de Cramér-Rao

- Seja $\ell = \log f(x|\theta)$ a função de log-verossimilhança individual.
- Definimos o **limite inferior de Cramér-Rao** como

$$LI(\theta) = \frac{1}{n\, I_F(\theta)},$$

em que $I_F(\theta) = E\left[\left(\frac{\partial \ell}{\partial \theta}\right)^2\right]$ é a *informação de Fisher*.

- Sob certas condições de regularidade (basicamente, o suporte não depende de θ e é possível trocar a ordem das operações de derivação e integração) podemos escrever

$$I_F(\theta) = -E\left[\frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta^2.}\right].$$

Passos para calcular $LI(\theta)$

1. Obtenha a função de log-verossimihança individual: $\ell = \log f(x|\theta)$.
2. Determine a segunda derivada em relação ao parâmetro θ: $\ell'' = \frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta^2}$
3. Obtenha a informação de Fisher: $I_F(\theta) = -E[\ell'']$
4. Calcule o limite inferior de Cramér-Rao: $LI(\theta) = \frac{1}{nI_F(\theta)}$

Exemplo 8.1

Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, em que σ^2 é conhecido. Obtenha o limite inferior de Cramér-Rao para os estimadores não viesados de μ.

- **Lembrete:** Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, então $f(x) = (2\pi\sigma^2)^{-1/2} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty$

Definição 8.2: Eficiência de um estimador

- Suponha que $\hat{\theta}$ seja não viesado para o parâmetro θ.
- Chamamos de **eficiência do estimador** $\hat{\theta}$ o quociente

$$e(\hat{\theta}) = \frac{LI(\theta)}{Var(\hat{\theta})}.$$

- Como $Var(\hat{\theta}) \geq LI(\theta)$, temos

$$0 < e(\hat{\theta}) \leq 1.$$

- Note que $LI(\theta) = Var(\hat{\theta}) \implies e(\hat{\theta}) = 1.$
  - Nesse caso $\hat{\theta}$ é chamado **eficiente**.

Exemplo 8.2

Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, em que σ^2 é conhecido. No exemplo 8.1 verificamos que $LI(\mu) = \sigma^2/n$. Verifique se o estimador não viesado $\overline{X}$ é eficiente para μ.

Exemplo 8.3

Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de tamanho n da variável aleatória $X \sim \text{Poisson}(\theta)$.
Verifique se $\overline{X}$ é eficiente para θ.

- **Lembrete:** Se $X \sim \text{Poisson}(\theta)$, então $f(x) = \frac{e^{-\theta}\theta^x}{x!},\ x = 0, 1, 2, \ldots$

Exemplo 8.4

Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de tamanho n da variável aleatória $X \sim \text{Geométrica}(p)$.
Verifique se $\overline{X}$ é eficiente para p.

- **Lembrete:** Se $X \sim \text{Geométrica}(p)$, então
  - $f(x) = (1-p)^x p, \ x = 0, 1, 2, 3 \ldots$
  - $E(X) = \frac{1-p}{p}$
  - $Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$

Fim