Família Exponencial

Como reconhecer distribuições pertencentes à família exponencial?

ESTAT0078 – Inferência I
Prof. Dr. Sadraque E. F. Lucena
http://sadraquelucena.github.io/inferencia1

Definição 12.1: Família exponencial

Dizemos que a distribuição da variável aleatória X pertence à família exponencial unidimensional se pudermos escrever sua densidade (ou função de probabilidade), $f(x)$, na forma

$$f(x) = \exp\{c(\theta)T(x) + d(\theta) + S(x)\},$$

$x \in A$, em que

- c, T, d e S são funções reais,
- A não envolve θ.

Exemplo 12.1

A distribuição Bernoulli(θ) pertence à família exponencial unidimensional?

- $X \sim \text{Bernoulli}(\theta)$: $f(x) = \theta^x (1-\theta)^{1-x},\ x = 0, 1.$

Exemplo 12.2

A distribuição $N(\mu, 1)$ pertence à família exponencial unidimensional?

- $X \sim N(\mu, \sigma^2)$: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty$

Definição 12.2: Família exponencial multidimensional

Dizemos que a distribuição da variável aleatória X pertence à família exponencial de dimensão k se sua f.p. ou f.d.p. é dada por

$$f(x) = \exp\left\{\sum_{j=1}^{n} c_j(\theta)T_j(x) + d(\theta) + S(x)\right\},$$

$x \in A$,em que

- c_j, T_j, d e S são funções reais, $j = 1, \ldots, k$;
- A não envolve θ.

Exemplo 12.3

Verifique se a distribuição $N(\mu, \sigma^2)$ pertence à família exponencial bidimensional.

- $X \sim N(\mu, \sigma^2)$: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty$

Teorema 12.1: Estatística suficiente na família exponencial

Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de uma distribuição pertencente à família exponencial de dimensão k, cuja função de probabilidade ou densidade é dada por

$$f(x) = \exp\left\{ \sum_{j=1}^{k} c_j(\boldsymbol{\theta}) T_j(x) + d(\boldsymbol{\theta}) + S(x) \right\}$$

Então, sob as condições usuais de regularidade, a estatística

$$\mathbf{T}(\underset{\sim}{X}) = \left(\sum_{i=1}^{n} T_1(X_i), \ldots, \sum_{i=1}^{n} T_k(X_i) \right)$$

é suficiente para o vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta}$, desde que o suporte não dependa desses parâmetros.

- O Teorema 12.1 decorre diretamente do critério da fatoração de Neyman.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \exp\left\{ \sum_{j=1}^{k} c_j(\boldsymbol{\theta}) T_j(x) + d(\boldsymbol{\theta}) + S(x) \right\} \\
&= \exp\left\{ \sum_{j=1}^{k} c_j(\boldsymbol{\theta}) T_j(x) + d(\boldsymbol{\theta}) \right\} \exp\{S(x)\} \\
&= h(\underset{\sim}{x}) g_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{T}(\underset{\sim}{X}))
\end{aligned}
$$

com

- $h(\underset{\sim}{x}) = \exp\{S(x)\}$
- $g_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{T}(\underset{\sim}{X})) = \exp\left\{ \sum_{j=1}^{k} c_j(\boldsymbol{\theta}) T_j(x) + d(\boldsymbol{\theta}) \right\}$.

Exemplo 12.4

Determine as estatísticas suficientes encontradas nos exemplos anteriores.

Fim