Estatística Completa e Estimador Não Viciado de Variância Uniformemente Mínima

Como obter estimadores não viciados de variância uniformemente mínima?

ESTAT0078 – Inferência I
Prof. Dr. Sadraque E. F. Lucena
http://sadraquelucena.github.io/inferencia1

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

- O melhor estimador que podemos ter para um parâmetro é aquele que, além de ser não viesado, possui a menor variância possível entre todos os concorrentes.
- Esse estimador é o chamado Estimador Não Viciado de Variância Mínima Uniforme (ENVVUM).
- Para identificar esse estimador na prática, utilizamos a combinação entre *suficiência*, *completude* e *não viés* por meio do Teorema de Lehmann–Scheffé.

Definição 13.1: Estatística Completa

Uma estatística T é dita completa em relação à família $f(x)$ se, dada uma função $g(T)$,

$$E\left(g(T)\right) = 0 \quad \text{apenas se } g(T) = 0$$

com probabilidade 1.

Exemplo 13.1

Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória obtida de X com distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda > 0$, desconhecido. Mostre que $T = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim$ Poisson$(n\lambda)$ é uma estatística completa em relação à Poisson.

- $X \sim$ Poisson(θ): $P(X = x) = \frac{e^{-\theta}\theta^x}{x!}, x = 0, 1, 2, \ldots$

Exemplo 13.2

Seja X_1, X_2 uma amostra aleatória da variável $X \sim$ Bernoulli(p). Verifique que $T = X_1 - X_2$ não é uma estatística completa.

$X \sim$ Bernoulli(p): $P(X = x) = p^x(1-p)^{1-x}, x = 0, 1$

Exemplo 13.3

Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória obtida de X com distribuição de Bernoulli com parâmetro p, $0 < p < 1$. Mostre que $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$ é uma estatística completa.

- $X \sim$ Bernoulli(p): $P(X = x) = p^x(1-p)^{1-x}, x = 0, 1$
- $T \sim$ Binomial(n, p): $P(T = t) = \binom{n}{t} p^t (1-p)^{n-t}, x = 0, 1, 2, \ldots, n$

Teorema 13.1

Suponha que X tenha distribuição pertencente à família exponencial, ou seja, podemos escrever

$$f(x) = \exp\{c(\theta)T(x) + d(\theta) + S(x)\},$$

então $T(x)$ é suficiente para θ.

- $T(x)$ também será completa se o domínio de $c(\theta)$ contiver um intervalo da reta.

Teorema 13.2: Teorema de Lehmann-Scheffé

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de X com f.d.p. (ou f.p.) $f(x)$. Seja T uma estatística suficiente e completa. Seja S um estimador não viciado de θ. Então $\hat{\theta} = E(S|T)$ é o para θ.

- Prova no livro do Bolfarine, pág. 31.

Exemplo 13.4

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da distribuição de Poisson com parâmetro θ. Verifique que $\overline{X}$ é o ENVVUM para θ.

$X \sim$ Poisson(θ): $P(X = x) = \frac{e^{-\theta}\theta^x}{x!}, x = 0, 1, 2, \ldots$

Fim