

# Agrupamento de Dados com k-means e Métodos Relacionados

ESTAT0109 – Mineração de Dados em Estatística

Prof. Dr. Sadraque E. F. Lucena

[sadraquelucena@academico.ufs.br](mailto:sadraquelucena@academico.ufs.br)

<http://sadraquelucena.github.io/mineracao>

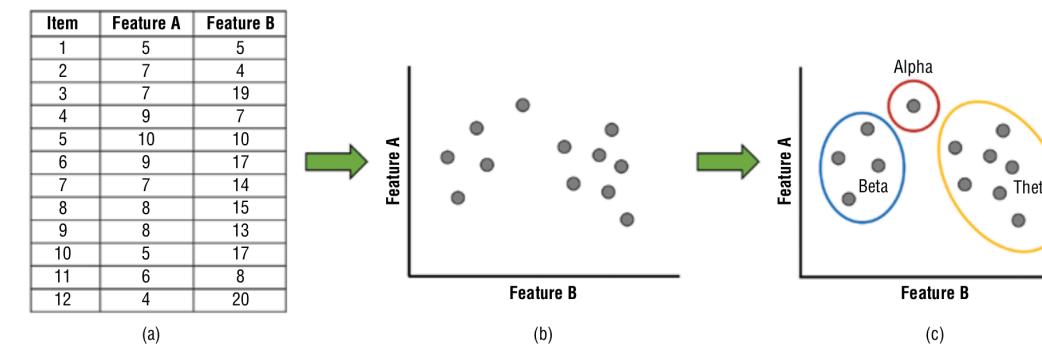
# Objetivo da Aula

- Compreender as lógicas centrais dos algoritmos de clusterização particionada, suas medidas de similaridade e robustez;
- Decidir qual método usar diante de diferentes tipos de dados e problemas.

# O que é Agrupamento?

# Conceito Central

- Agrupamento (*Clustering*) consiste em métodos usados para partitionar dados não rotulados em *clusters* (subgrupos) baseados em similaridade.
- É uma técnica **não supervisionada** que busca identificar padrões emergentes nos dados.



# Exemplos de Aplicação

## Saúde:

- Agrupar internações por idade, diagnóstico e tempo de permanência → revelar perfis clínicos de pacientes e apoiar políticas hospitalares regionais.

## Finanças:

- Agrupar clientes por renda, histórico de crédito e uso de produtos → identificar perfis de risco e consumo financeiro.

## Municípios:

- Agrupar cidades por indicadores socioeconômicos, educacionais e de infraestrutura → mapear padrões territoriais de vulnerabilidade.

Cada cluster representa um padrão real que surge dos dados – e a escolha do método define quão bem conseguimos enxergá-los.

# Tipos de Agrupamento

A clusterização pode ser classificada por sua estrutura e regras:

# Problema Central: O Protótipo

Nosso foco será em agrupamento **particionado**. A lógica central desses métodos é:

1. **Escolher  $k$  “centros”** (chamados de *protótipos*).
2. **Atribuir** cada ponto de dado ao protótipo mais próximo.
3. **Atualizar** a posição de cada protótipo com base nos pontos que lhe foram atribuídos.
4. **Repetir** os passos 2 e 3 até que os grupos não mudem mais (convergência).

Cada método de clusterização particionada é uma combinação diferente da resposta a duas perguntas:

- O que é o “protótipo”? → definição do *centro* (média, mediana, medoide, moda...)
- Como medir “proximidade”? → escolha da métrica de distância (Euclidiana, Manhattan, Gower...)

# Mapa Mental: Que tipo de dado eu tenho?

- A escolha do algoritmo e da medida de distância depende da **natureza dos seus dados**.
- A pergunta-chave é:
  - **Caso 1:** Meus dados são **TODOS NUMÉRICOS**? (Ex: Idade, Renda, Temperatura)
  - **Caso 2:** Meus dados são **TODOS CATEGÓRICOS**? (Ex: Região, Sexo, Tipo Sanguíneo)
  - **Caso 3:** Meus dados são **MISTOS**? (Ex: Idade, Renda, Região, Sexo)
- Vejamos como lidar com cada caso.

# Caso 1: Dados Numéricos

# Algoritmo Padrão: K-Means (K-Médias)

O K-means é o ponto de partida clássico para dados numéricos.

- **Aplicação:** Dados numéricos.
- **Centro (Protótipo):** A Média de todos os pontos do cluster.
- **Métrica (Distância):** Distância Euclidiana.
- Esta abordagem é classificada como:
  - **Particionada** (limites independentes)
  - **Exclusiva** (um item, um cluster)
  - **Completa** (todos os itens são atribuídos)
- O usuário define o número de *clusters* ( $k$ ) que o conjunto de dados terá.

# K-Means: Métrica de Distância Utilizada (Euclidiana)

- A distância Euclidiana (L2) é a métrica padrão do K-means.
- Ela mede a “linha reta” entre dois pontos no espaço vetorial.
- Sejam  $a = (a_1, \dots, a_p)$  e  $b = (b_1, \dots, b_p)$  duas observações, então

$$\text{dist}_E(a, b) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \dots + (a_p - b_p)^2}.$$

## Atenção!

- **Padronize variáveis** antes do cálculo: isto evita que uma variável (ex: Salário) domine o resultado sobre outra (ex: Idade).
- A elevação ao quadrado ( $x^2$ ) torna esta medida **muito sensível a outliers**.

# K-Means: Definição do Centro (Centróide)

- O centróide de um *cluster* obtido via K-means é a **média** das coordenadas de todos os pontos do *cluster*.

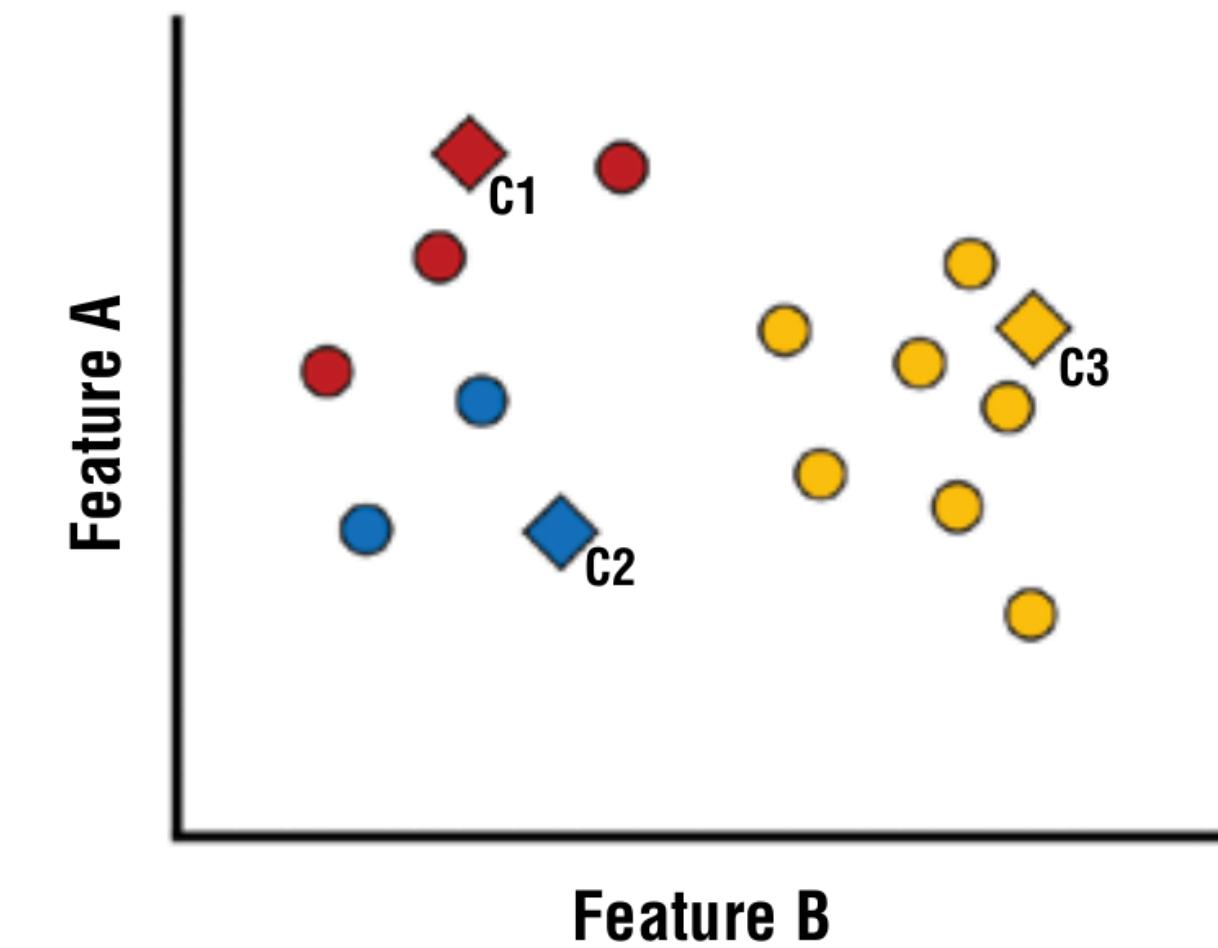
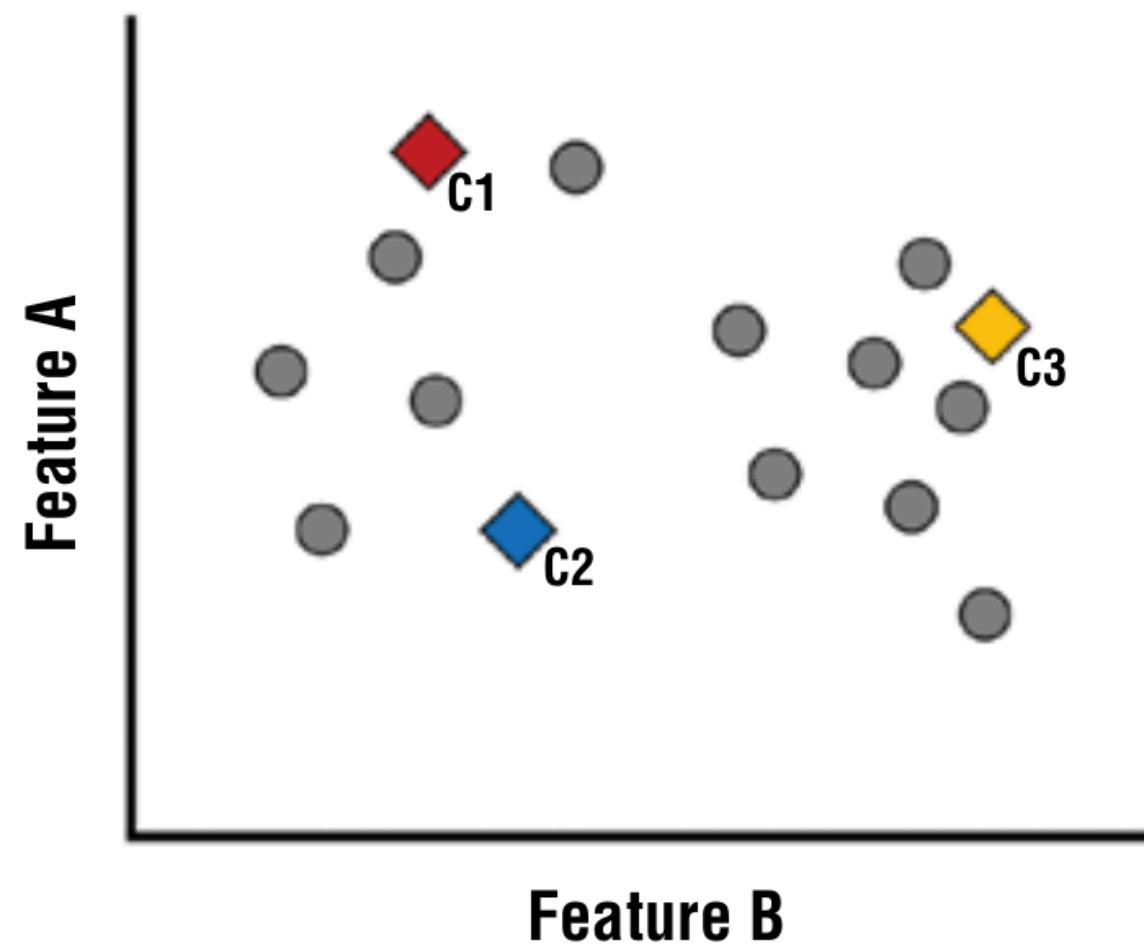
$$\text{centroide}(x, y, z) = \left( \frac{x_1 + y_1 + z_1}{3}, \frac{x_2 + y_2 + z_2}{3} \right)$$

- **Ponto Crítico:** Como se baseia em médias, o centróide é **altamente sensível a valores extremos (outliers)**, que podem deslocar o centro de massa do cluster.

# K-Means: Funcionamento

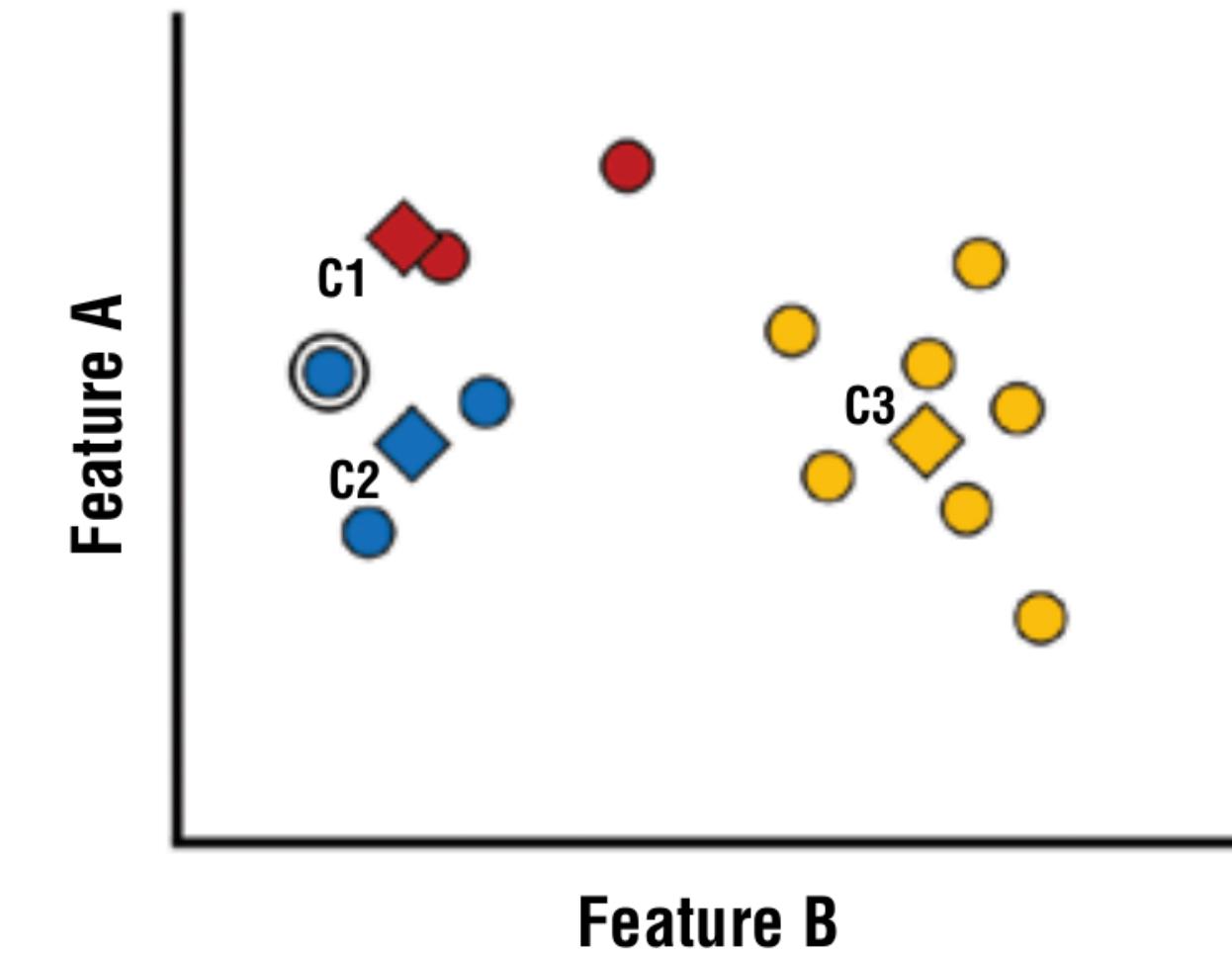
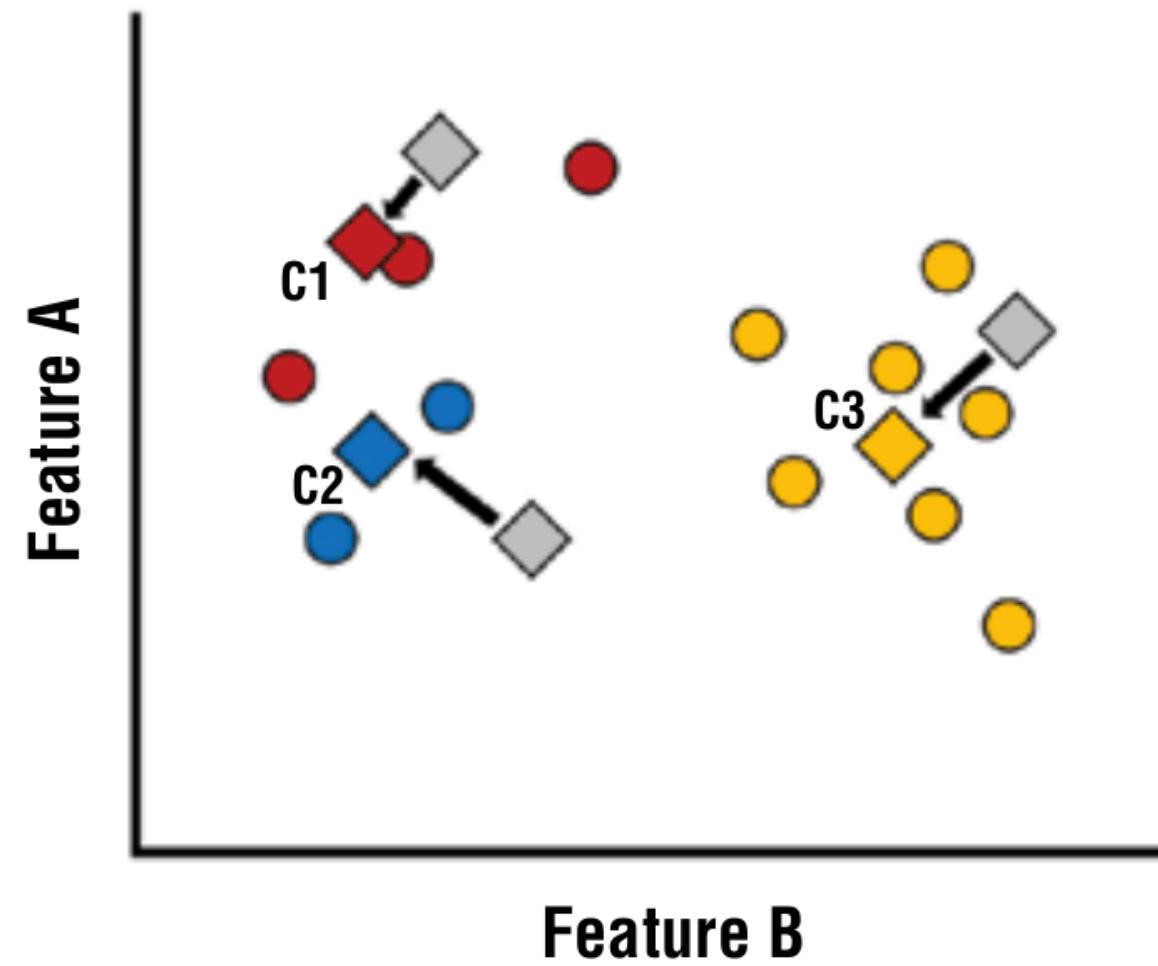
Suponha  $k = 3$ .

1. O algoritmo escolhe  $k$  pontos aleatórios que servem como **centros dos clusters** iniciais.
2. O algoritmo calcula a distância (Euclidiana) de cada item aos centros e **atribui o item ao cluster cujo centro está mais próximo**.



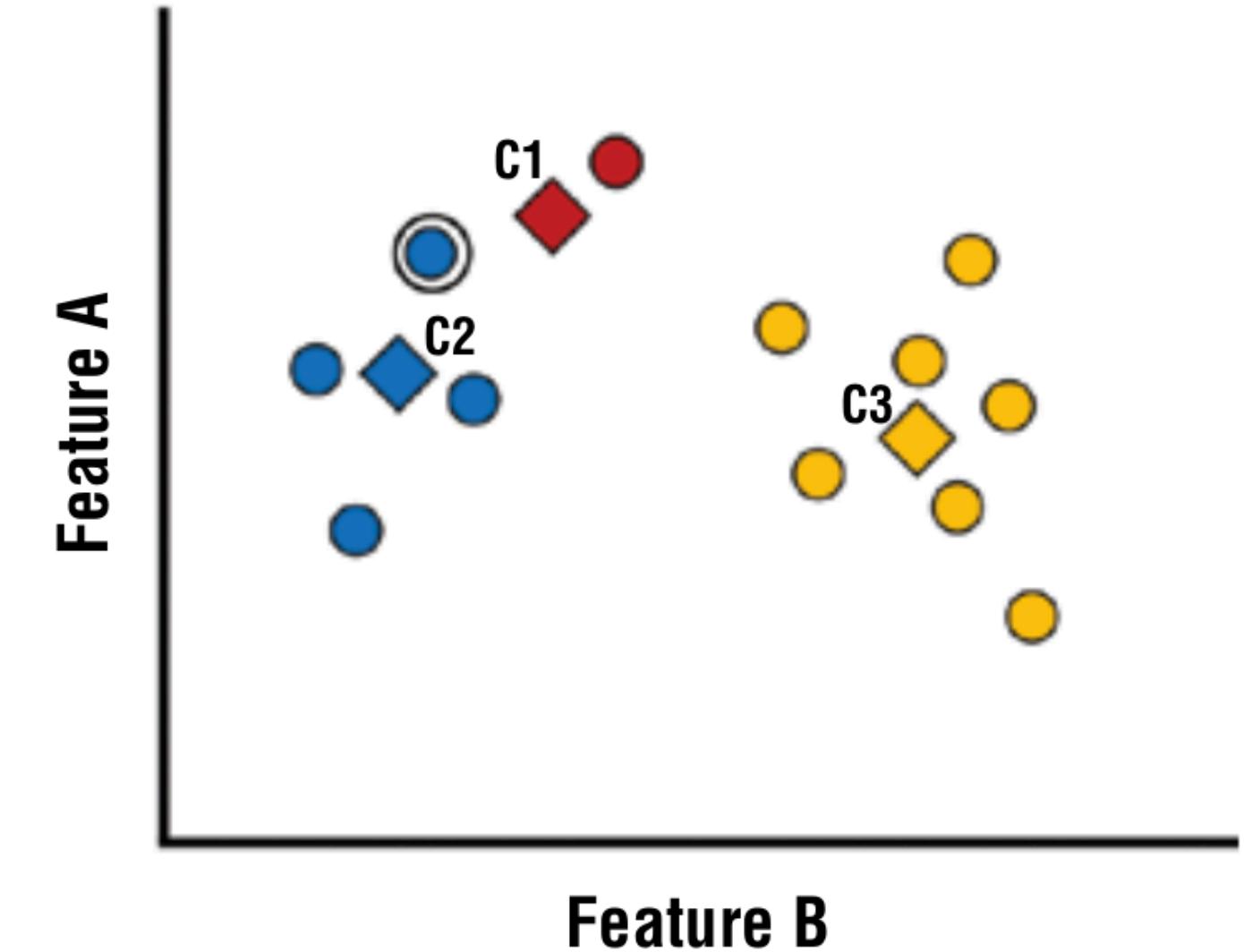
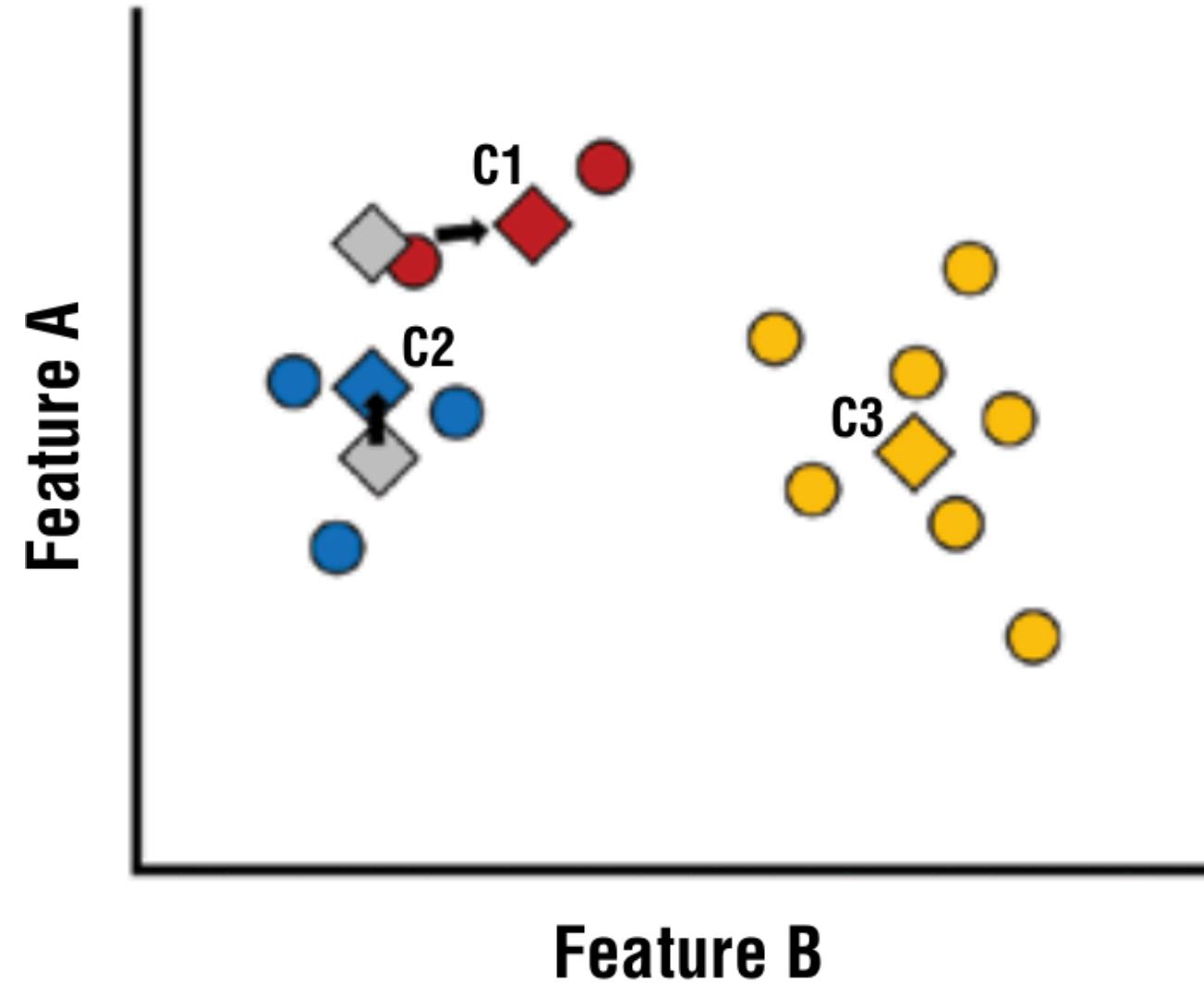
# K-Means: Funcionamento

3. Após atribuir cada item a um *cluster*, o algoritmo calcula o **novo centróide** (a média) de cada *cluster* formado.
4. O algoritmo **recalcula a distância** de cada item a cada *novo centróide* e o reatribui ao *cluster* mais próximo.



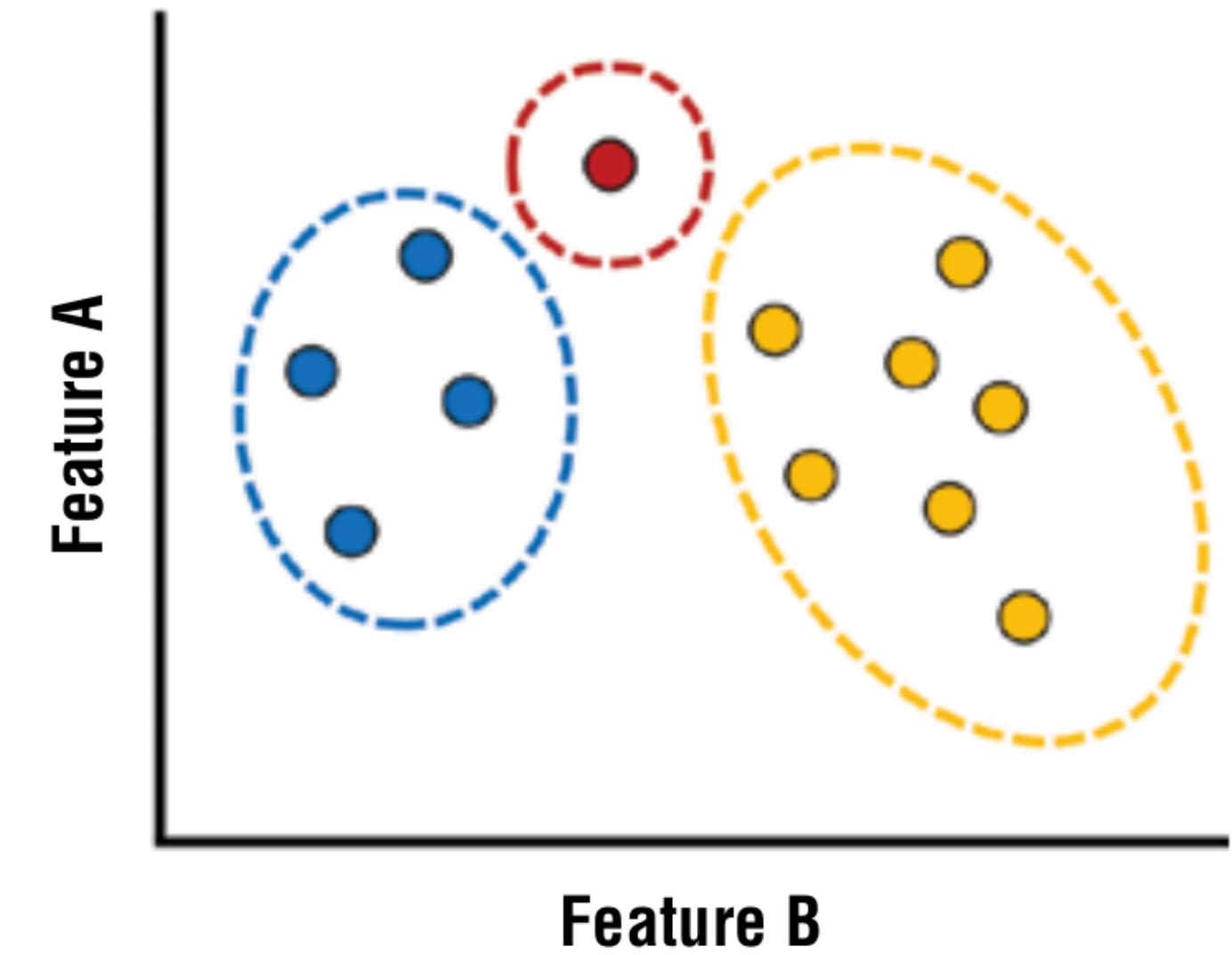
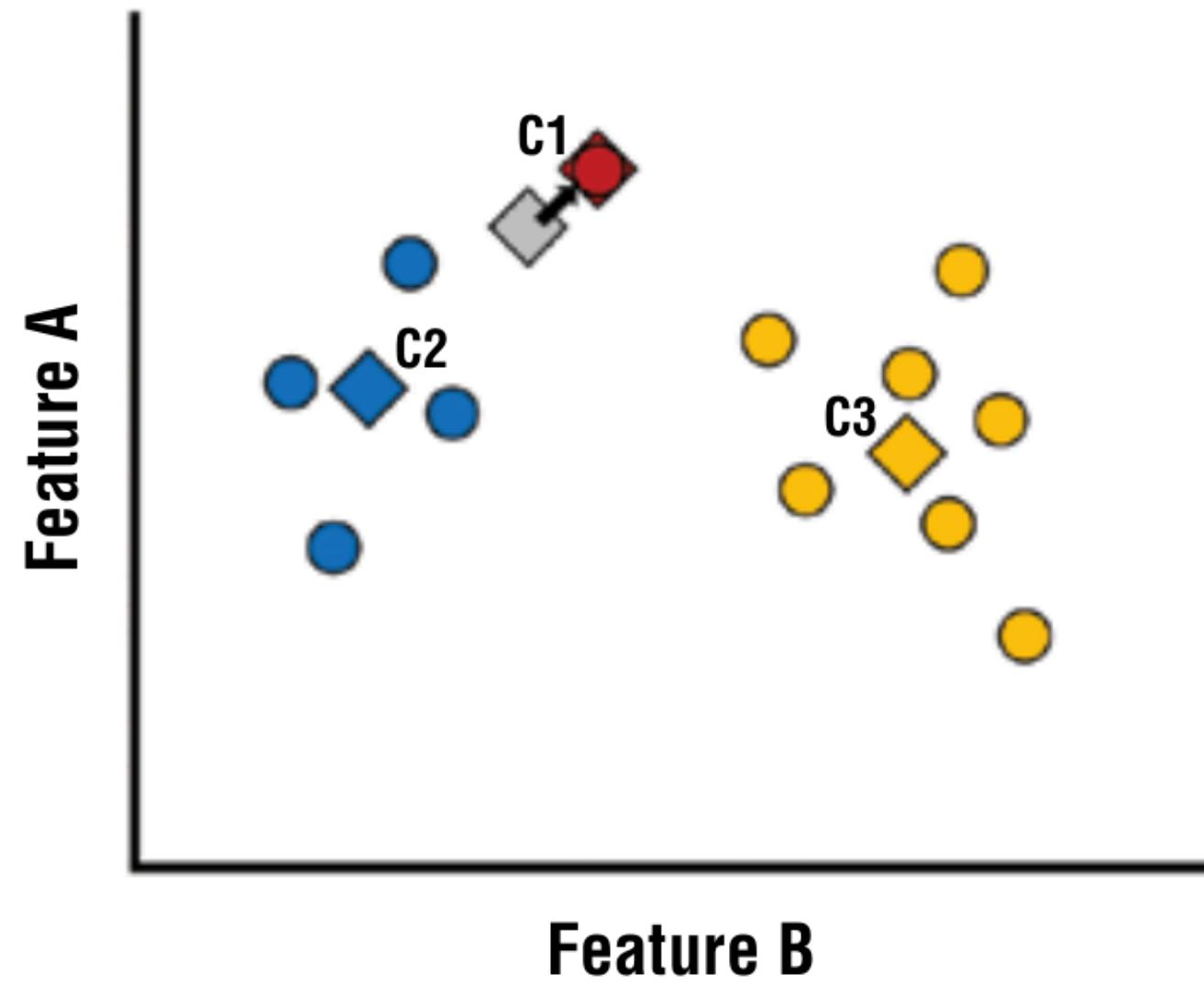
# K-Means: Funcionamento

5. O processo de atribuição e avaliação é repetido, com novos centróides calculados para cada *cluster* e cada item é reatribuído ao *cluster* mais próximo.



# K-Means: Funcionamento

6. Em algum momento, os centróides não mudarão mais de lugar e não resultarão em novas atribuições.
  - Nesse ponto dizemos que o algoritmo **convergiu** e o processo é interrompido.



# Ponto Fraco do K-Means: Outliers

- O K-Means minimiza a soma dos quadrados das distâncias (associado à Distância Euclidiana L2).
- O centróide (baseado na **média**) é o ponto de equilíbrio.
- Um único *outlier* age como um “peso” muito grande, “puxando” o centróide em sua direção, pois sua grande distância é elevada ao quadrado.
- Precisamos então de alternativas **robustas** quando há *outliers* nos dados.

# Solução Robusta 1: K-Medians (K-medianas)

- **Aplicação:** Dados numéricos com *outliers*.
- **Centro (Protótipo):** A Mediana de cada variável. O centro é calculado.
- **Métrica (Distância):** Distância de Manhattan (L1).
- **Vantagem:** A Mediana é muito mais robusta a *outliers* do que a Média.

# K-Medians: A Métrica Métrica de Distância Utilizada (Manhattan)

- A distância de Manhattan ( $L1$ ) mede a distância como sendo a soma das diferenças absolutas (“caminho dos quarteirões”).
- Sejam  $a = (a_1, \dots, a_p)$  e  $b = (b_1, \dots, b_p)$  duas observações, então

$$\text{dist}_M(a, b) = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \dots + |a_p - b_p|.$$

## Por que é robusta?

- Não eleva as diferenças ao quadrado.
- Diferenças grandes (causadas por *outliers*) têm um peso **linear**, e não quadrático.
- O K-Medians, ao usar  $L1$ , é naturalmente menos afetado por pontos extremos.

# Solução Robusta 2: K-Medoids (PAM)

- **Aplicação:** Dados numéricos com *outliers*.
- **Centro (Protótipo):** Um Ponto Real (o *medoide*). O centro é eleito.
- **Métrica (Distância):** Qualquer uma!
- **Como o centro é eleito?** O medoide é o ponto *real* cuja **distância total** aos demais pontos do seu cluster é a **mínima**.

$$\text{medoide} = \arg \min_{x_i \in C} \sum_{x_j \in C} d(x_i, x_j)$$

O método também é chamado de PAM (Partitioning Around Medoids – Particionamento em Torno de Medoides)

# K-Medoids vs. K-Medians: A Vantagem (Interpretabilidade)

## K-Medians (Centro Calculado)

O centro é a **mediana** de cada variável.

O protótipo (`med_x`, `med_y`) pode não existir na sua base de dados.

**Interpretação (Fraca):** “O Cluster 1 representa clientes com idade mediana de 25 e salário mediano de R\$ 1200.”

## K-Medoids (Centro Real)

O centro é **um ponto real** dos dados.

O protótipo é, por exemplo, o **Cliente B (ID 456)**.

**Interpretação (Forte):** “O Cluster 1 é representado pelo **Cliente B**, que tem 25 anos e salário de R\$ 1200.”

# K-Medoids vs. K-Medians: A Vantagem (Flexibilidade)

- K-Medians está intrinsecamente ligado à otimização da Distância Manhattan (L1).
- K-Medoids pode usar **QUALQUER** medida de distância:
  - Distância Euclidiana (L2)
  - Distância Manhattan (L1)
  - **Distância de Gower** (para dados mistos - *vamos ver adiante!*)
- Isso torna o K-Medoids a ferramenta mais poderosa e flexível para dados complexos.

# Resumo: Clusterização de Dados Numéricos

Comparação	K-means	K-medians	K-medoids
Centro	Média	Mediana	Ponto real (medoide)
Distância	Euclidiana (L2)	Manhattan (L1)	Qualquer (Gower!)
Robustez* a <i>outlier</i>	Baixa	Média	Alta
Ponto real?	Não (calculado)	Não (calculado)	<b>Sim (eleito)</b>
Quando usar	Dados numéricos limpos	Dados numéricos com <i>outliers</i>	<b>Dados com <i>outliers</i> ou mistas</b>

# Caso 2: Dados Categóricos

# O Problema com Dados Categóricos

- **Problema:** Agrupar dados como (Sexo, Região, Plano de Saúde).
- Métricas como a Distância Euclidiana ou de Manhattan não funcionam. Não podemos calcular algo como:

$$\sqrt{('Nordeste' - 'Sul')^2 + ('Público' - 'Privado')^2}$$

- Precisamos de uma métrica e um centro que funcionem para categorias.

# A Métrica: Distância de Hamming (ou Dissimilaridade Simples)

- A Distância de Hamming é usada quando **todas as variáveis são categóricas** (nominais).
- Ela mede **quantas categorias diferem** entre duas observações.
- Sejam  $a = (a_1, a_2, \dots, a_p)$  e  $b = (b_1, b_2, \dots, b_p)$  duas observações, então

$$\text{dist}_H(a, b) = I(a_1 \neq b_1) + I(a_2 \neq b_2) + \dots + I(a_p \neq b_p)$$

em que  $I(a_i \neq b_i) = 1$  se as categorias forem diferentes, e 0 se forem iguais.

# Distância de Hamming: Exemplo

Atributo	Paciente A	Paciente B	Diferença
Sexo	M	F	1
Região	Nordeste	Nordeste	0
Tipo de Plano	Público	Privado	1
<b>Total</b>			<b>2</b>

- Distância Hamming = 2 (duas categorias diferentes).

# Algoritmo para Dados Categóricos: K-Modes

- O K-modes é uma extensão do K-means para dados puramente categóricos.
- **Aplicação:** Dados Categóricos (nominais).
- **Centro (Protótipo):** A Moda de cada variável (o modo).
- **Métrica (Distância):** Distância de Hamming.

# K-Modes: O Centro (Modo)

- No K-modes, o protótipo (centro) do *cluster* não é uma média, mas sim o **vetor das categorias mais frequentes** (a moda) encontradas no cluster.
- Exemplo de Cálculo do Modo (Protótipo) para um Cluster:

Variável	Membros do Cluster	Moda (Centro)
Região	Nordeste, Nordeste, Sul, Nordeste, Sudeste	<b>Nordeste (3/5)</b>
Plano	Público, Privado, Público, Público, Privado	<b>Público (3/5)</b>
Sexo	M, F, F, M, F	<b>F (3/5)</b>

# K-Modes: Vantagens e Limitações

- **Uso:**
  - Bases com *apenas* variáveis nominais (ex.: diagnóstico primário, modalidade de serviço, ocupação).
- **Vantagens:**
  - Rápido e simples.
  - Interpretação direta (o “perfil modal” de cada cluster é muito claro).
- **Limitações:**
  - Não trata variáveis **numéricas** (ex: Idade).
  - Não trata variáveis **ordinais** de forma natural (ex: Escolaridade).

# Caso 3: Dados Mistas

# O Problema com Dados Mistas

- **Problema:** Agrupar itens usando variáveis numéricas e categóricas como Idade, Renda, Gênero, Região.
- Nesses casos K-Means e K-Modes falham. Precisamos de soluções híbridas.
- **Temos duas estratégias principais:**
  1. **Robusta (Gower + K-Medoids):** Usa um algoritmo robusto com uma métrica de distância flexível.
  2. **Rápida (K-Prototypes):** Usa um algoritmo híbrido que combina K-Means e K-Modes.

# Solução 1 (Robusta): Gower + K-Medoids

Usamos como métrica a Distância de Gower

# Solução 1 (Robusta): Gower + K-Medoids

- **Aplicação:** Dados Mistos.
  - **Centro (Protótipo):** Ponto Real (medoide).
  - **Métrica (Distância):** Distância de Gower.
- 
- Como K-Medoids funciona com **qualquer** matriz de distância, fazemos o seguinte:
    1. Calculamos a matriz de dissimilaridade  $N \times N$  entre todos os pontos usando Gower.
    2. Fornecemos essa matriz ao algoritmo K-Medoids (PAM).
    3. O K-Medoids elegerá os pontos reais mais centrais com base nessa distância mista.

# Gower + K-Medoids: Vantagens e Limitações

## Vantagens:

- A solução mais robusta e flexível.
- Trata todos os tipos de variáveis (numéricos, categóricos, ordinais) corretamente.
- Robusto a *outliers* (medoide é ponto real).
- Interpretação ótima (medoide = observação representativa).

## Limitações:

- **Custo Computacional:** A matriz de Gower  $N \times N$  pode ser custosa (memória e tempo) para datasets com N grande (ex:  $N > 10.000$ ).
- Complexidade elevada ( $O(N^2)$ ): o tempo de execução ou o uso de memória cresce quadraticamente conforme o número de observações aumenta.

# Solução 2 (Rápida): K-Prototypes

- O K-prototypes une K-means (para variáveis numéricas) e K-modes (para variáveis categóricas).
- **Aplicação** : Dados Mistos.
- **Centro (Protótipo)**: Híbrido!
  - **Média** para variáveis numéricas.
  - **Moda** para variáveis categóricas.
- **Métrica (Distância)**: Híbrida (Euclidiana + Hamming).

# K-Prototypes: A Métrica Híbrida

- A distância é uma soma ponderada das distâncias numéricas e categóricas.
- $\text{dist}(a, b) = \sum(a_i - b_i)^2 + \gamma \sum I(a_j \neq b_j)$ 
  - $\sum(a_i - b_i)^2$ : Parte Numérica (Dist. Euclidiana ao Quadrado)
  - $\sum I(a_j \neq b_j)$ : Parte Categórica (Dist. Hamming)
  - $\gamma$ : Um peso (parâmetro) que define a importância da parte categórica.

## Vantagens:

- **Escala bem:** Não precisa de matriz  $N \times N$ . Excelente para grandes bases mistas.
- Interpretação direta (protótipo = perfil de médias + modas).

## Limitações:

- A parte numérica (K-Means) ainda é sensível a outliers.
- Variáveis ordinais são tratadas como categóricas (perda de ordem).
- O parâmetro  $\gamma$  exige ajuste/escolha.

# Módulo 5: Escolhendo o número de $k$

# Como definir o número de *clusters* (escolher $k$ )?

- Suponha que escolhemos o método (ex: K-Means). Mas quantos *clusters* ( $k$ ) devemos criar?
- $k = 2?$   $k = 3?$   $k = 10?$
- Esta é a pergunta mais comum em agrupamento.
- Não há uma resposta única “correta”, mas sim métodos que ajudam a encontrar um  $k$  “ótimo”.
- Veremos três dos mais usados:
  - Método do Cotovelo (*Elbow Method*)
  - Método da Silhueta Média (*Average Silhouette*)
  - Estatística Gap (*Gap Statistic*)

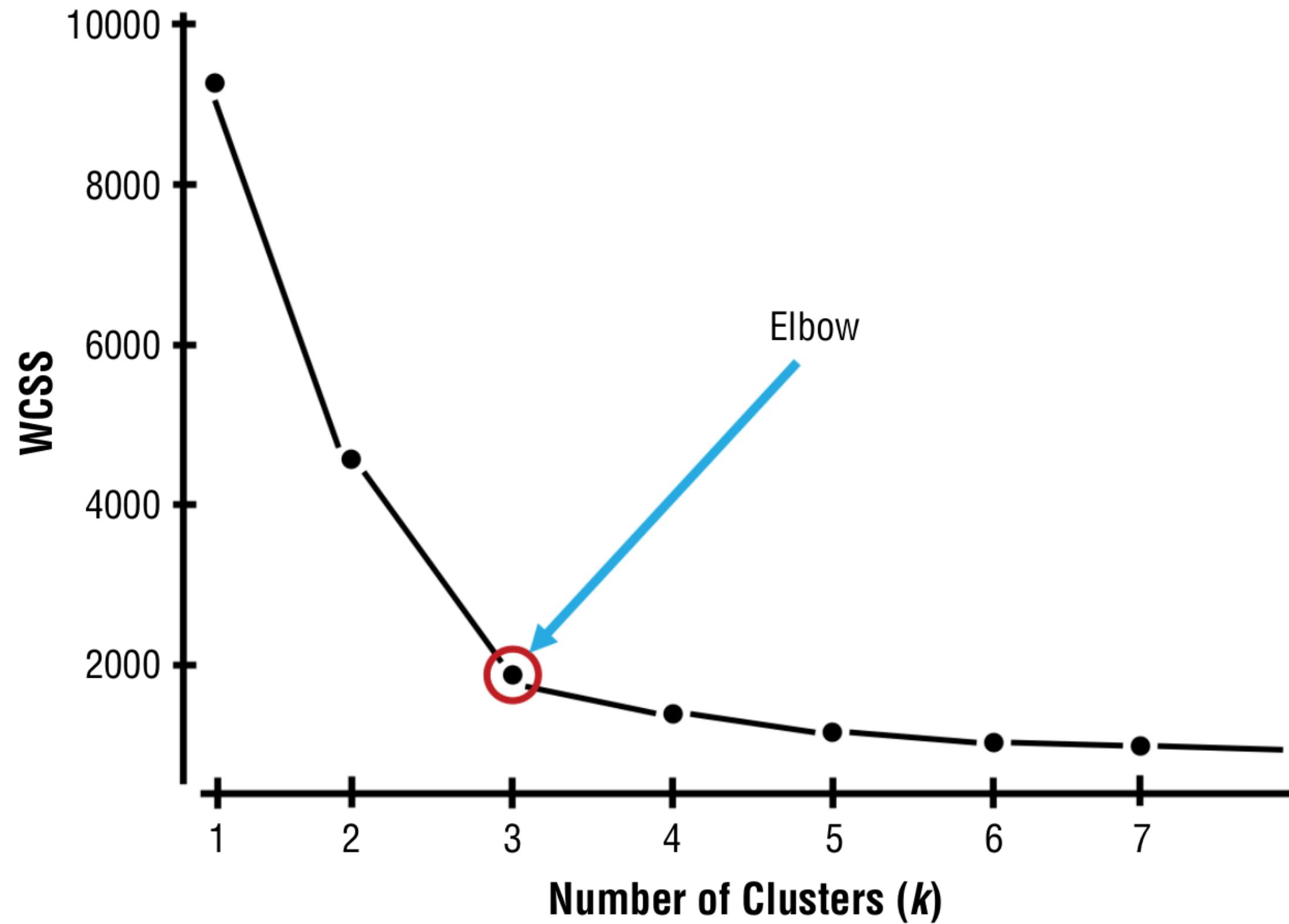
# Método 1: Cotovelo (*Elbow Method*)

- A ideia é testar vários valores de  $k$  e calcular a **Soma dos Quadrados Intra-clusters** (*Within-Cluster Sum of Squares, WCSS*).
- $WCSS$  mede a **compactação** (homogeneidade) total dos *clusters*.

$$WCSS_k = \sum_{\text{cluster 1}} \text{dist}(P_i, C_1)^2 + \sum_{\text{cluster 2}} \text{dist}(P_i, C_2)^2 + \dots$$

- Quanto mais  $k$ , menor o  $WCSS$  (naturalmente,  $WCSS = 0$  se  $k = N$ ).
- Procuramos o  $k$  onde a redução do  $WCSS$  começa a diminuir drasticamente: o **“cotovelo”** da curva.
- É o ponto de equilíbrio: aumentar  $k$  não traz melhora significativa.

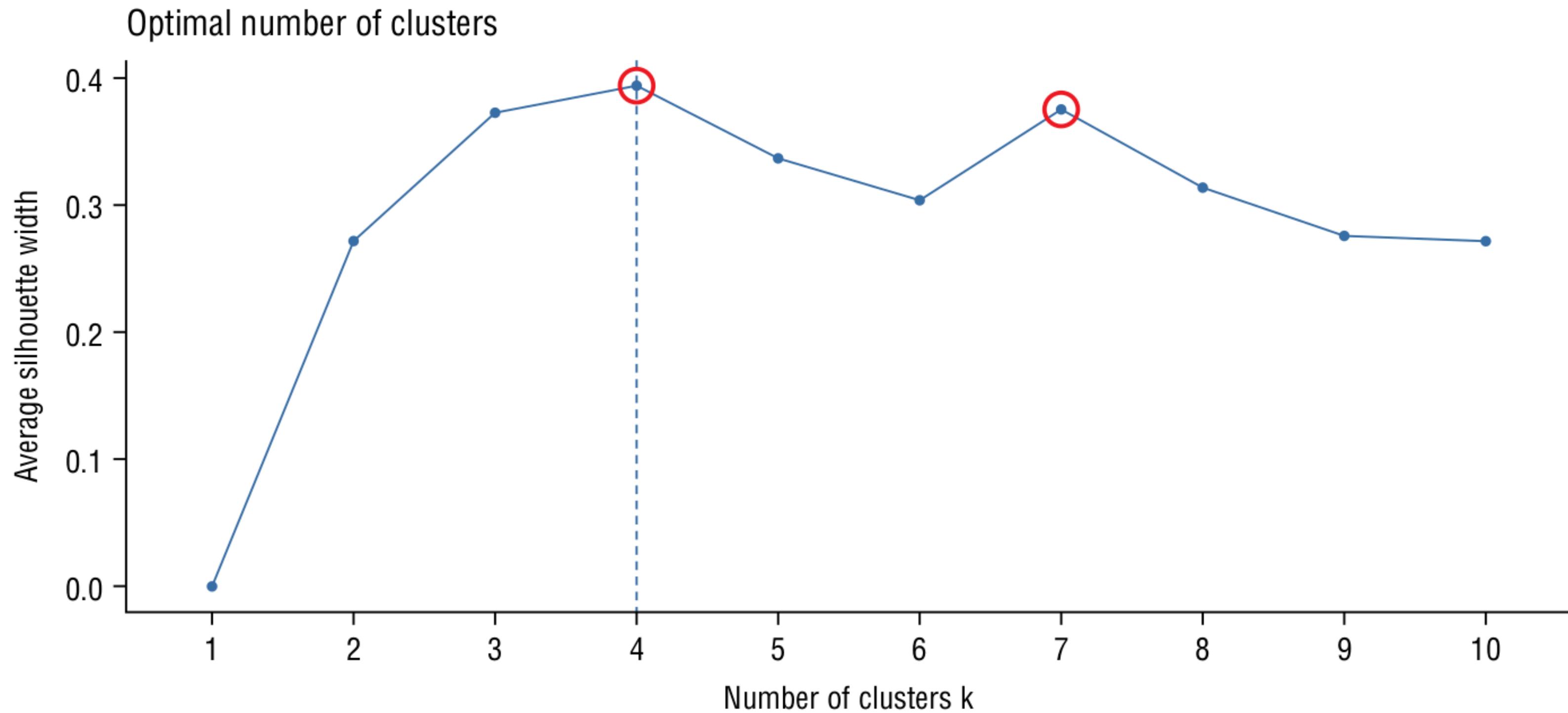
# Método 1: Cotovelo (*Elbow Method*)



# Método 2: Silhueta Média (*Average Silhouette*)

- Mede o **grau de coesão e separação** dos *clusters*. Avalia o quanto bem cada item está posicionado.
- Para cada observação  $i$ , calcula-se  $S(i) = \frac{b(i)-a(i)}{\max\{a(i),b(i)\}}$ 
  - $a(i)$ : distância média de  $i$  aos pontos do **mesmo cluster** (coesão).
  - $b(i)$ : distância média de  $i$  aos pontos do **cluster vizinho mais próximo** (separação).
- $S(i)$  varia de -1 a 1:
  - $\approx 1$ : Item bem ajustado (ideal).
  - $\approx 0$ : Item na fronteira entre *clusters*.
  - $< 0$ : Item provavelmente no *cluster* errado.
- O  $k$  ótimo é aquele que maximiza a **Silhueta Média** de todas as observações.

# Método 2: Silhueta Média (Average Silhouette)



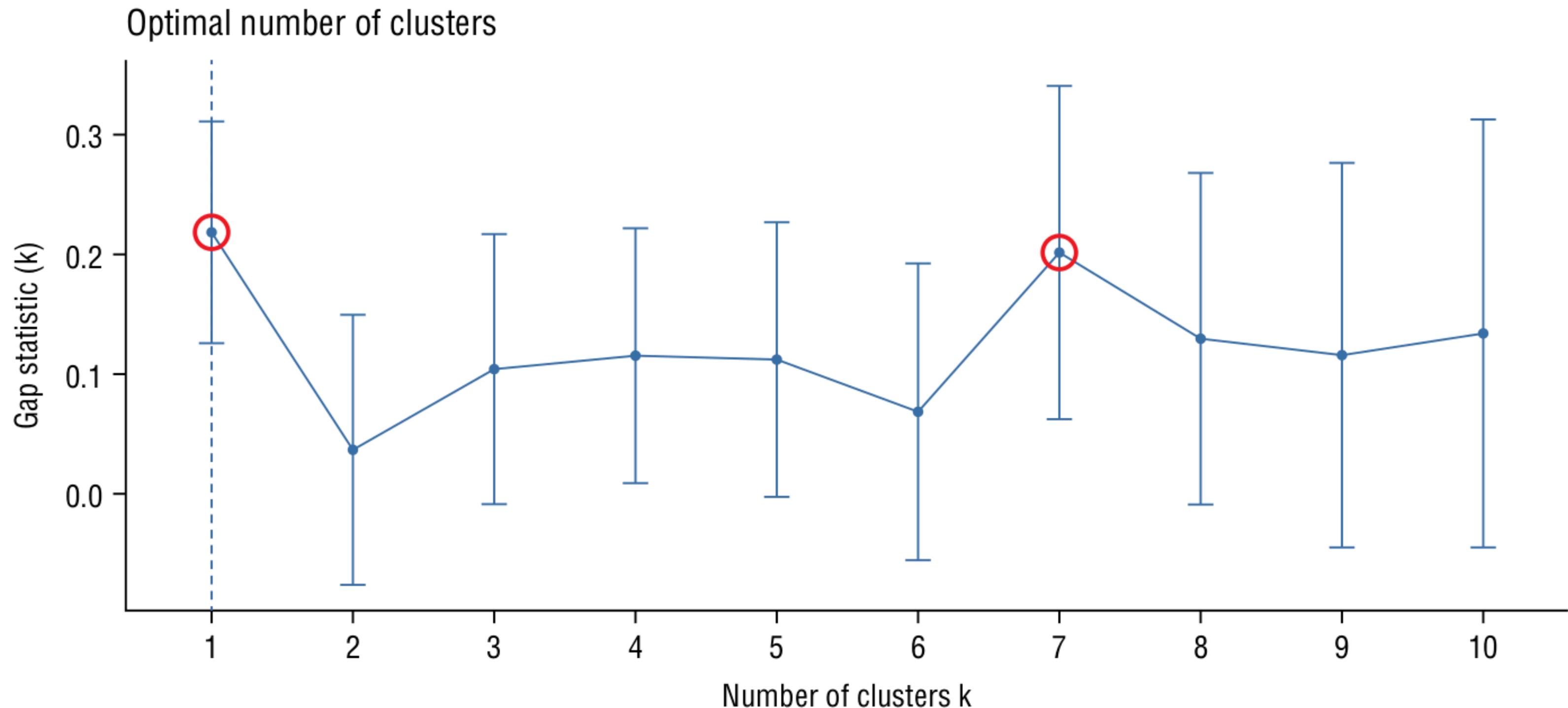
# Método 3: Estatística Gap

- Compara a **dispersão observada** ( $WCSS_k$ ) com a **dispersão esperada** sob uma distribuição de referência aleatória (sem *clusters*).
  - A ideia é:  $k$  é bom se a compactação dos nossos *clusters* for muito melhor do que uma compactação aleatória.
1. Para cada  $k$ , calcule  $\log(WCSS_k)$  dos dados originais.
  2. Gere  $B$  amostras aleatórias (uniformes) e calcule a média de  $\log(WCSS_k^{*b})$ .
  3. A **Estatística Gap** é a diferença:

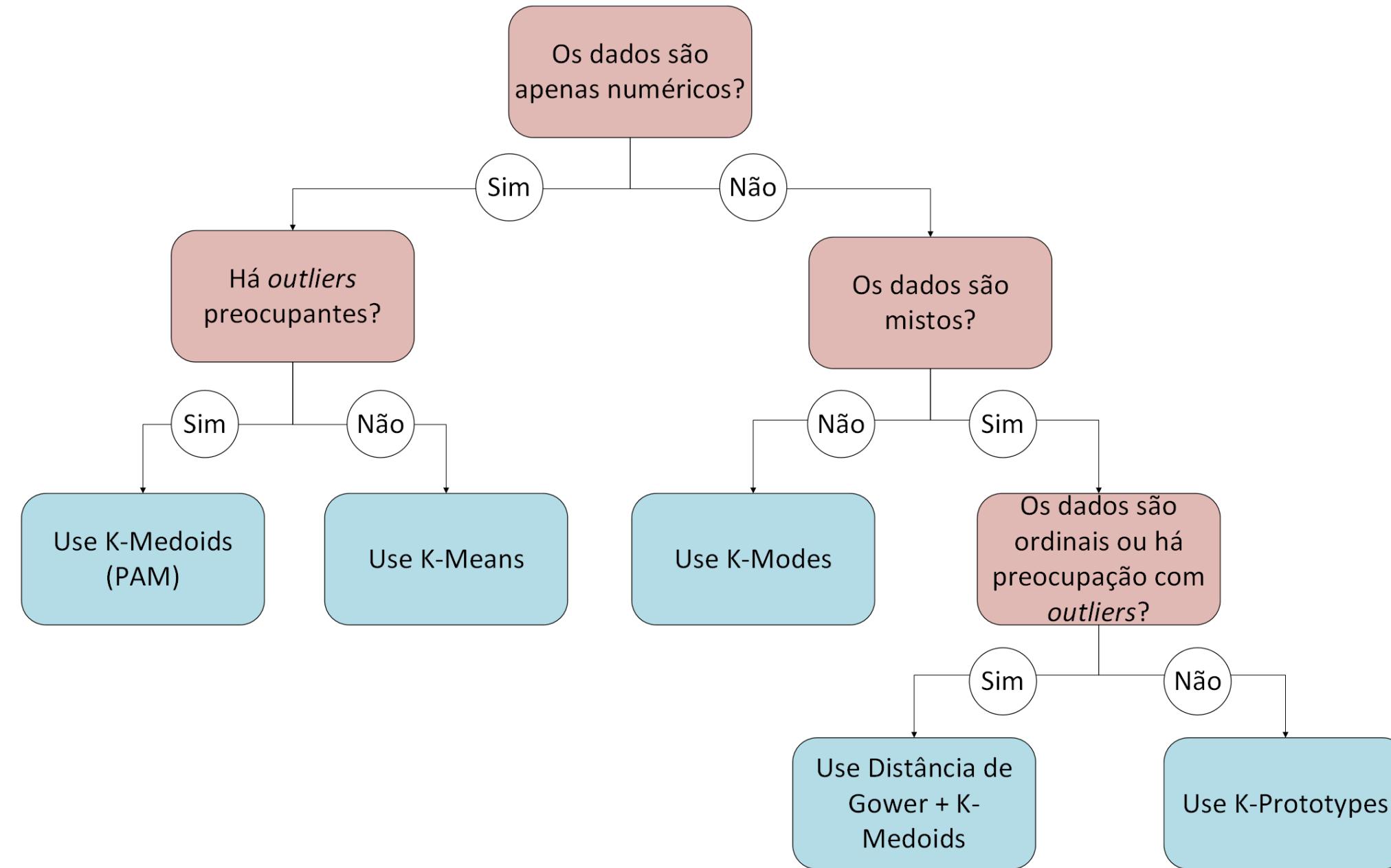
$$Gap(k) = E[\log(WCSS_k^{*b})] - \log(WCSS_k)$$

- Procuramos o  $k$  que maximiza o  $Gap(k)$ .

# Método 3: Estatística Gap



# Para definir o algoritmo de agrupamento



- E para encontrar  $k$ , use métodos de validação como **Cotovelo (WCSS)**, **Silhueta** ou **Estatística Gap**.

**Agora vamos fazer no R...**