Regressão Logística

ESTAT0109 – Mineração de Dados em Estatística

Prof. Dr. Sadraque E. F. Lucena

sadraquelucena@academico.ufs.br

http://sadraquelucena.github.io/mineracao

Objetivo da Aula

- Compreender por que a Regressão Linear falha em classificação e como a Função Sigmoide resolve isso limitando as probabilidades entre 0 e 1.
- Aprender a ajustar um modelo de Regressão Logística para prever a probabilidade de eventos binários (Sim/Não, Fraude/Legal, 0/1).
- Ler os coeficientes não apenas como números, mas como fatores de risco (Odds Ratio) que aumentam ou diminuem a chance do evento.
- Superar a “ilusão da acurácia” aprendendo a usar Matriz de Confusão, Sensibilidade, Especificidade e Curva ROC/AUC para validar o modelo.

Regressão Logística: O Classificador

- A regressão logística é a técnica fundamental para **classificação binária**.
- Diferente da regressão linear (que prevê valores contínuos), aqui queremos estimar a **probabilidade** de um evento ocorrer.
- **Aplicações em Mineração de Dados:**
  - **Churn:** Prever se um cliente vai cancelar o serviço ($Y = 1$) ou ficar ($Y = 0$).
  - **Fraude:** Identificar se uma transação é fraudulenta ou legítima.
  - **Medicina:** Classificar um tumor como maligno ou benigno com base em exames.
  - **Crédito:** Estimar o risco de inadimplência (default).

Formulação

- Considere y_i como nossa variável alvo (Target) binária:

$$\begin{cases} y_i = 1, & \text{(evento de interesse: fraude, óbito, clique)} \\ y_i = 0, & \text{(evento negativo)} \end{cases}$$

- Temos um conjunto de *features* (variáveis explicativas) $\underset{\sim}{x} = x_1, x_2, \ldots, x_p$.
- **Objetivo da Predição:** Não queremos apenas “0” ou “1”, mas sim a **probabilidade** (π_i) de pertencer à classe positiva:

$$P(y_i = 1 | \underset{\sim}{x}) = \pi_i$$

Por que não usar Regressão Linear?

- Tentar ajustar uma reta $\pi_i = \beta_0 + \beta_1 x$ gera dois problemas fatais para classificação:
  1. **Violação de Limites:** Uma reta pode prever probabilidades absurdas, como -0.2 ou 1.5. Probabilidade deve estar sempre entre $[0, 1]$.
  2. **Não-Linearidade:** A transição de "não acontecer" para "acontecer" raramente é linear; geralmente é abrupta (como um "S").

- Precisamos de uma função que "esprema" as predições para dentro do intervalo $[0, 1]$.

A Solução: Função Logística (Sigmoide)

- Para garantir que a predição π_i fique entre 0 e 1, usamos a **Função Logística**:

$$\pi_i = \frac{1}{1 + e^{-(\beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \cdots + \beta_p x_{pi})}}$$

- Essa fórmula gera uma curva em formato de **S** (Sigmoide).
- O termo dentro da exponencial, $\beta_0 + \beta_1 x + \ldots$, é chamado de **score** ou *preditor linear*.
  - Se o score for muito alto $\rightarrow \pi_i \approx 1$.
  - Se o score for muito baixo (negativo) $\rightarrow \pi_i \approx 0$.
  - Se o score for zero $\rightarrow \pi_i = 0.5$.

O “Logit” (Linearizando o problema)

- Podemos reescrever a equação anterior para torná-la linear nos parâmetros. Isso facilita a estimativa:

$$\underbrace{\log\left(\frac{\pi_i}{1-\pi_i}\right)}_{\text{Logit}} = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \cdots + \beta_p x_{pi}$$

- **Logit:** É o logaritmo da chance (*log-odds*).
- **Interpretação Visual:**
  - O lado direito é a nossa velha conhecida equação linear.
  - O lado esquerdo é a transformação necessária para adequar a probabilidade ao mundo linear.

Estimando os Parâmetros (O “Fit”)

- Como encontramos os melhores β?
- Na regressão linear, usávamos Mínimos Quadrados (menor distância entre pontos e reta).
- Na logística, usamos **Máxima Verossimilhança (Maximum Likelihood Estimation - MLE)**.
  - **Intuição:** O algoritmo busca os valores de β que maximizam a probabilidade de observar os dados que realmente coletamos.
  - Em Machine Learning, isso é equivalente a minimizar a função de custo **Log-Loss** (Entropia Cruzada).

> *Nota: Não usamos R^2 aqui. A qualidade do ajuste será medida pela capacidade de classificar corretamente (Acurácia, ROC, AUC).*

Fazendo a Predição

- Uma vez que o modelo “aprendeu” os βs, fazemos a predição em novos dados em dois passos:

1. **Calcular o Score Linear:** $\eta_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \ldots$
2. **Converter para Probabilidade:** $\hat{\pi}_i = \frac{exp(\eta_i)}{1+exp(\eta_i)}$

Exemplo Prático

Modelo ajustado para prever **Inadimplência** $(y = 1)$:

$$\text{logit}(\pi) = -10.65 + 0.0055 \times (\text{Saldo Devedor})$$

Pergunta: Qual a probabilidade de calote para um saldo de $2.000?

Cálculo:

1. $\eta = -10.65 + 0.0055(2000) = -10.65 + 11 = 0.35$
2. $\pi = \frac{e^{0.35}}{1+e^{0.35}} = \frac{1.419}{2.419} \approx 0.58$

> **Conclusão:** Há **58%** de probabilidade de inadimplência. O modelo classifica como "Mau Pagador" (se o corte for 0.5).

Interpretando os Coeficientes (Odds Ratio)

- Em Machine Learning, muitas vezes focamos apenas na predição, mas entender os coeficientes ajuda a explicar o modelo (“Explainable AI”).
- O β nos diz como o logaritmo da chance muda. Para facilitar, usamos o **Odds Ratio (OR)** = e^{β}.
- **Regra de Bolso:**
  - OR > 1: A variável **aumenta** a chance do evento (Risco).
  - OR < 1: A variável **diminui** a chance do evento (Proteção).
  - OR = 1: A variável não afeta a predição.

Exemplo de Interpretação

Modelo de Risco de Crédito:

$$\text{logit} = -10.8 + \underbrace{0.0057}_{\beta_1}\text{Saldo} + \underbrace{0.0001}_{\beta_2}\text{Salário} - \underbrace{0.65}_{\beta_3}\text{Estudante (Sim)}$$

- **Saldo ($e^{0.0057} \approx 1.006$):** A cada $1 dólar a mais de dívida, o risco aumenta ligeiramente (0.6%).
- **Estudante ($e^{-0.65} \approx 0.52$):**
  - O valor é menor que 1. Isso indica proteção.
  - Ser estudante **reduz** a chance de inadimplência em cerca de 48% ($1 - 0.52$) comparado a não-estudantes, mantendo as outras variáveis constantes.

Da Probabilidade à Decisão (Threshold)

- O modelo cospe uma probabilidade (ex: $0.7, 0.2, 0.55$).
- Para tomar uma decisão (negar crédito, dar remédio), precisamos de um **Ponto de Corte (Threshold)** c de forma que

$$\begin{cases} \pi_i \geq c \Rightarrow \text{Classifica como } 1 \text{ (Positivo)} \\ \pi_i < c \Rightarrow \text{Classifica como } 0 \text{ (Negativo)} \end{cases}$$

- **Padrão:** $c = 0.5$
- **Ajustável:** Dependendo do problema, podemos subir ou descer a régua.

Avaliação: Matriz de Confusão

Comparação entre o **Real** e o **Predito**:

	Negativo Real (0)	**Positivo Real (1)**
Predito 0	Verdadeiro Negativo (VN)	Falso Negativo (FN) *(Erro Tipo II)*
Predito 1	Falso Positivo (FP) *(Erro Tipo I)*	Verdadeiro Positivo (VP)

- **Acurácia:** De tudo que tentei prever, quanto acertei?

$$\frac{VP + VN}{\text{Total}}$$

- *Cuidado:* Acurácia engana em dados desbalanceados!

O Problema do Desbalanceamento

Imagine que usamos **corte = 0.5** em dois modelos diferentes.

Cenário Real: Temos muito mais “Zeros” (Bons Pagadores) do que “Uns” (Maus Pagadores).

- Se o modelo “chutar” que **todo mundo é bom pagador (0)**:
  - Ele terá altíssima acurácia (ex: 90%).
  - Mas terá **zero** capacidade de detectar a fraude/inadimplência (Sensibilidade = 0).

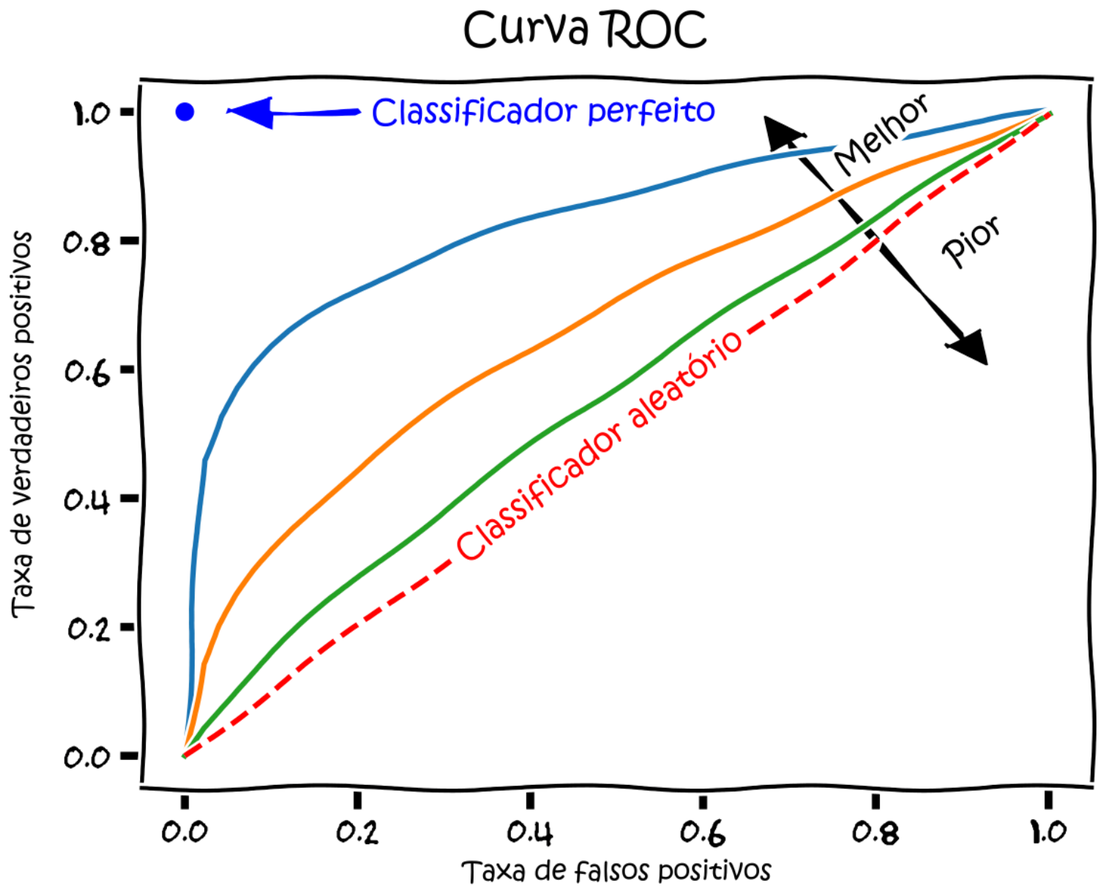
> Em Data Mining, raramente olhamos apenas para Acurácia. Precisamos olhar para **Sensibilidade** e **Precisão**.

Curva ROC e AUC

- Como escolher o melhor ponto de corte c? Não queremos testar um por um manualmente.
- A **Curva ROC** plota a performance do modelo para **TODOS** os pontos de corte possíveis.
- Eixos:
  - Y: Sensibilidade (Taxa de VP): Capacidade de detectar o evento.
  - X: 1 - Especificidade (Taxa de FP): Taxa de alarme falso.

Curva ROC e AUC

- A melhor curva é a que “abraça” o canto superior esquerdo.



FONTE: Wikipedia.

Interpretando a AUC (Area Under Curve)

- A área abaixo dessa curva resume a qualidade do modelo em um único número.

Valor AUC	Interpretação
0.5	**Aleatório** (Igual a jogar moeda)
0.7 - 0.8	Aceitável
0.8 - 0.9	Excelente
> 0.9	Suspeite de vazamento de dados (Overfitting)

- **Objetivo:** Maximizar a AUC.

Validação Cruzada (A Regra de Ouro)

- Nunca avaliamos o modelo nos mesmos dados usados para criar os β. Isso seria "decorar a prova".

1. **Hold-out:** Separar 70% Treino / 30% Teste.
2. **K-Fold Cross Validation:**
   - Divide os dados em k partes (ex: 10).
   - Treina em 9, testa em 1.
   - Repete 10 vezes e tira a média.

- **Só confiamos na métrica (Acurácia/AUC) obtida na base de TESTE.**

Agora vamos fazer no R...